Cánh Diều

ĐỖ ĐỨC THÁI (Tổng Chủ biên kiêm Chủ biên)
PHẠM XUÂN CHUNG – NGUYỄN SƠN HÀ – NGUYỄN THỊ PHƯƠNG LOAN
PHẠM SỸ NAM – PHẠM MINH PHƯƠNG – PHẠM HOÀNG QUÂN

Toán 10

TẬP MỘT

BẢN MẪU

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

ĐỖ ĐỨC THÁI (Tổng Chủ biên kiêm Chủ biên)
PHẠM XUÂN CHUNG – NGUYỄN SƠN HÀ – NGUYỄN THỊ PHƯƠNG LOAN
PHẠM SỸ NAM – PHẠM MINH PHƯƠNG – PHẠM HOÀNG QUÂN

Toán 10

TẬP MỘT

BẢN MẪU

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

BIỂU TƯỢNG DÙNG TRONG SÁCH

CÂU HỎI KHỞI ĐỘNG
Gợi mở vấn đề, dẫn dắt học sinh vào bài học

HOẠT ĐỘNG
Giúp học sinh phân tích, kiến tạo kiến thức mới với sự hướng dẫn của giáo viên

KHÁM PHÁ KIẾN THỨC
Phát hiện kiến thức mới từ hoạt động

KIẾN THỨC TRỌNG TÂM
Nội dung kiến thức trọng tâm

LUYỆN TẬP – VẬN DỤNG
- Sử dụng những kiến thức vừa học để làm những bài tập cơ bản
- Vận dụng kiến thức đã biết để giải quyết vấn đề, đặc biệt những vấn đề thực tiễn

LƯU Ý
Những kiến thức, kĩ năng cần lưu ý thêm

TÌM HIỂU THÊM
Giúp học sinh tìm hiểu thêm những kiến thức mới góp phần mở rộng nội dung bài học

Các em giữ gìn sách cẩn thận, không viết vào sách để sử dụng được lâu dài.

Các em học sinh lớp 10 yêu quý!

Sau 4 năm ở trung học cơ sở, các em bước vào lớp 10. Ở lớp 10, các em sẽ có thêm nhiều hiểu biết toán học mới về: đại số và đại số tổ hợp; hệ thức lượng trong tam giác, vectơ và phương pháp toạ độ trong mặt phẳng; tiếp tục tìm hiểu sâu hơn thống kê và xác suất; tiến hành những hoạt động thực hành và trải nghiệm, đặc biệt về những hoạt động tài chính đơn giản, sử dụng phần mềm toán học trong thực hành tính toán và vẽ hình hình học. Qua đó giúp các em hiểu biết thêm những công cụ quan trọng của toán học trong việc giải quyết những vấn đề thực tiễn.

Toàn bộ những điều trên được thể hiện qua những tranh ảnh, hình vẽ, bài tập độc đáo và hấp dẫn; qua những câu chuyện lí thú về khoa học tự nhiên, về văn hoá và nghệ thuật, kiến trúc, thể thao và du lịch. Từ đó, các em tiến thêm một bước trên con đường khám phá thế giới bí ẩn và đẹp đẽ của toán học, đặc biệt là "làm giàu" về vốn văn hoá chung và có cơ hội "Mang cuộc sống vào bài học - Đưa bài học vào cuộc sống".

Chịu khó suy nghĩ, trao đổi với thầy cô giáo và bạn bè, nhất định các em sẽ ngày càng tiến bộ và cảm thấy vui sướng khi nhận ra ý nghĩa: Học toán rất có ích cho cuộc sống hằng ngày.

Chúc các em học tập thật tốt, say mê học toán và có thêm nhiều niềm vui.

Các tác giả

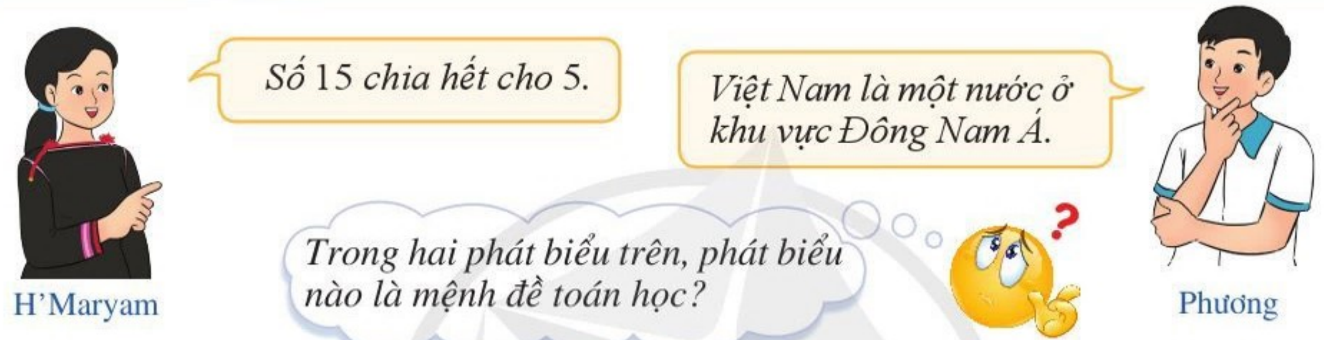
MỤC LỤC

CHƯƠNG I

MỆNH ĐỀ TOÁN HỌC. TẬP HỢP

Trong chương này, chúng ta sẽ tìm hiểu những nội dung sau: mệnh đề toán học, tập hợp và các phép toán trên tập hợp.

§1 MỆNH ĐỀ TOÁN HỌC



I. MỆNH ĐỀ TOÁN HỌC

1

a) Phát biểu của bạn H'Maryam có phải là một câu khẳng định về tính chất chia hết trong toán học hay không?

b) Phát biểu của bạn Phương có phải là một câu khẳng định về một sự kiện trong toán học hay không?

Phát biểu của bạn H'Maryam là một mệnh đề khẳng định về một sự kiện trong toán học, gọi là *mệnh đề toán học*.

Như vậy, phát biểu của bạn Phương không phải là mệnh đề toán học.

Chú ý: Khi không sợ nhầm lẫn, ta thường gọi tắt mệnh đề toán học là mệnh đề.

Ví dụ 1 Phát biểu nào sau đây là một mệnh đề toán học?

a) Hà Nội là Thủ đô của Việt Nam;

b) Số π là một số hữu tỉ;

c) $x = 1$ có phải là nghiệm của phương trình $x^2 - 1 = 0$ không?

Giải

Câu a) không phải là một mệnh đề toán học.

Câu b) là một mệnh đề toán học.

Câu c) là một câu hỏi nên không phải là một mệnh đề toán học.

1 Nêu hai ví dụ về mệnh đề toán học.

2 Trong hai mệnh đề toán học sau đây, mệnh đề nào là một khẳng định đúng? Mệnh đề nào là một khẳng định sai?

P: "Tổng hai góc đối của một tứ giác nội tiếp bằng 180°";

Q: "$\sqrt{2}$ là số hữu tỉ".

Mỗi mệnh đề toán học phải hoặc đúng hoặc sai. Một mệnh đề toán học không thể vừa đúng, vừa sai.

Khi mệnh đề toán học là đúng, ta gọi mệnh đề đó là một *mệnh đề đúng*.

Khi mệnh đề toán học là sai, ta gọi mệnh đề đó là một *mệnh đề sai*.

Chẳng hạn, trong hai mệnh đề ở Hoạt động 2, mệnh đề *P* là một mệnh đề đúng, mệnh đề *Q* là một mệnh đề sai.

Ví dụ 2 Tìm mệnh đề đúng trong những mệnh đề sau:

A: "Tam giác có ba cạnh";

B: "1 là số nguyên tố".

2 Nêu ví dụ về một mệnh đề đúng và một mệnh đề sai.

Giải

Mệnh đề *A* là mệnh đề đúng; mệnh đề *B* là mệnh đề sai vì 1 không là số nguyên tố.

II. MỆNH ĐỀ CHỨA BIẾN

3 Xét câu "*n* chia hết cho 3" với *n* là số tự nhiên.

a) Ta có thể khẳng định được tính đúng sai của câu trên hay không?

b) Với $n = 21$ thì câu "21 chia hết cho 3" có phải là mệnh đề toán học hay không? Nếu là mệnh đề toán học thì mệnh đề đó đúng hay sai?

c) Với $n = 10$ thì câu "10 chia hết cho 3" có phải là mệnh đề toán học hay không? Nếu là mệnh đề toán học thì mệnh đề đó đúng hay sai?

- *Ta chưa khẳng định được tính đúng sai của câu "n chia hết cho 3" với n là số tự nhiên.*
- *Với mỗi giá trị cụ thể của biến n, câu này cho ta một mệnh đề toán học mà ta có thể khẳng định được tính đúng sai của mệnh đề đó.*

Câu "*n* chia hết cho 3" là một *mệnh đề chứa biến*.

Ta thường kí hiệu mệnh đề chứa biến *n* là $P(n)$; mệnh đề chứa biến *x*, *y* là $P(x, y)$; ...

Ví dụ 3 Trong những câu sau, câu nào là mệnh đề chứa biến?

a) 18 chia hết cho 9;

b) $3n$ chia hết cho 9.

3 Nêu ví dụ về mệnh đề chứa biến.

Giải

a) Câu "18 chia hết cho 9" là một mệnh đề nhưng không phải là mệnh đề chứa biến.

b) Câu "3n chia hết cho 9" là một mệnh đề chứa biến, kí hiệu là $P(n)$: "3n chia hết cho 9".

III. PHỦ ĐỊNH CỦA MỘT MỆNH ĐỀ

4 Hai bạn Kiên và Cường đang tranh luận với nhau.

Kiên nói: "Số 23 là số nguyên tố".

Cường nói: "Số 23 không là số nguyên tố".

Em có nhận xét gì về hai câu phát biểu của Kiên và Cường?

Cho mệnh đề P. Mệnh đề "Không phải P" được gọi là *mệnh đề phủ định* của mệnh đề P và kí hiệu là $\overline{P}$.

Mệnh đề $\overline{P}$ *đúng* khi P sai.

Mệnh đề $\overline{P}$ *sai* khi P đúng.

Ví dụ 4 Lập mệnh đề phủ định của mỗi mệnh đề sau và nhận xét tính đúng sai của mệnh đề phủ định đó:

A: "16 là bình phương của một số nguyên";

B: "Số 25 không chia hết cho 5".

Giải

Mệnh đề $\overline{A}$: "16 không phải là bình phương của một số nguyên" và $\overline{A}$ sai.

Mệnh đề $\overline{B}$: "Số 25 chia hết cho 5" và $\overline{B}$ đúng.

4 Lập mệnh đề phủ định của mỗi mệnh đề sau và nhận xét tính đúng sai của mệnh đề phủ định đó.

P: "5,15 là một số hữu tỉ";

Q: "2 023 là số chẵn".

Chú ý: Để phủ định một mệnh đề (có dạng phát biểu như trên), ta chỉ cần thêm (hoặc bớt) từ "không" (hoặc "không phải") vào trước vị ngữ của mệnh đề đó.

IV. MỆNH ĐỀ KÉO THEO

5 Xét hai mệnh đề chứa biến:

P: "Số tự nhiên n chia hết cho 6"; Q: "Số tự nhiên n chia hết cho 3".

Xét mệnh đề R: "Nếu số tự nhiên n chia hết cho 6 thì số tự nhiên n chia hết cho 3".

Nhận xét về cách phát biểu mệnh đề R.

Cho hai mệnh đề P và Q. Mệnh đề "Nếu P thì Q" được gọi là *mệnh đề kéo theo* và kí hiệu là $P \Rightarrow Q$.

Mệnh đề $P \Rightarrow Q$ sai khi P đúng, Q sai và đúng trong các trường hợp còn lại.

Nhận xét: Tuỳ theo nội dung cụ thể, đôi khi người ta còn phát biểu mệnh đề $P \Rightarrow Q$ là "P kéo theo Q" hay "P suy ra Q" hay "Vì P nên Q"...

Ví dụ 5 Cho tam giác ABC. Xét hai mệnh đề:

P: "Tam giác ABC có hai góc bằng 60^{o}"; Q: "Tam giác ABC đều".

Hãy phát biểu mệnh đề $P \Rightarrow Q$ và nhận xét tính đúng sai của mệnh đề đó.

Giải

$P \Rightarrow Q$: "Nếu tam giác ABC có hai góc bằng 60^{o} thì tam giác ABC đều".

Mệnh đề trên là đúng.

Nhận xét: Các định lí toán học là những mệnh đề đúng và thường phát biểu ở dạng mệnh đề kéo theo $P \Rightarrow Q$.

Khi đó ta nói

P là *giả thiết*, Q là *kết luận* của định lí, hay

P là *điều kiện đủ* để có Q, hoặc Q là *điều kiện cần* để có P.

5 Hãy phát biểu một định lí toán học ở dạng mệnh đề kéo theo $P \Rightarrow Q$.

V. MỆNH ĐỀ ĐẢO. HAI MỆNH ĐỀ TƯƠNG ĐƯƠNG

6 Cho tam giác ABC. Xét mệnh đề dạng $P \Rightarrow Q$ như sau:

"Nếu tam giác ABC vuông tại A thì tam giác ABC có $AB^2 + AC^2 = BC^2$".

Phát biểu mệnh đề $Q \Rightarrow P$ và xác định tính đúng sai của hai mệnh đề $P \Rightarrow Q$ và $Q \Rightarrow P$.

- Mệnh đề $Q \Rightarrow P$ được gọi là *mệnh đề đảo* của mệnh đề $P \Rightarrow Q$.
- Nếu cả hai mệnh đề $P \Rightarrow Q$ và $Q \Rightarrow P$ đều đúng thì ta nói P và Q là *hai mệnh đề tương đương*, kí hiệu $P \Leftrightarrow Q$.

Nhận xét: Mệnh đề $P \Leftrightarrow Q$ có thể phát biểu ở những dạng như sau:

- "P tương đương Q";
- "P là điều kiện cần và đủ để có Q";
- "P khi và chỉ khi Q";
- "P nếu và chỉ nếu Q".

Ví dụ 6 Trong Hoạt động 6, hai mệnh đề P và Q có tương đương không? Nếu có, hãy phát biểu mệnh đề tương đương đó.

Giải

Trong Hoạt động 6, ta có:

Mệnh đề P: "Tam giác ABC vuông tại A";

Mệnh đề Q: "Tam giác ABC có $AB^2 + AC^2 = BC^2$".

6 Cho tam giác ABC. Từ các mệnh đề:

P: "Tam giác ABC đều", Q: "Tam giác ABC cân và có một góc bằng 60^{o}", hãy phát biểu hai mệnh đề $P \Rightarrow Q$ và $Q \Rightarrow P$ và xác định tính đúng sai của mỗi mệnh đề đó.

Nếu cả hai mệnh đề trên đều đúng, hãy phát biểu mệnh đề tương đương.

Theo định lí Pythagore, hai mệnh đề $P \Rightarrow Q$ và $Q \Rightarrow P$ đều đúng. Do đó, hai mệnh đề P và Q là tương đương và có thể phát biểu như sau: "Tam giác ABC vuông tại A khi và chỉ khi tam giác ABC có $AB^2 + AC^2 = BC^2$".

Chú ý: Trong toán học, những câu khẳng định đúng phát biểu ở dạng "$P \Leftrightarrow Q$" cũng được coi là một mệnh đề toán học, gọi là *mệnh đề tương đương*.

VI. KÍ HIỆU ∀ VÀ ∃

7 Cho mệnh đề chứa biến "n chia hết cho 3" với n là số tự nhiên.

a) Phát biểu "Mọi số tự nhiên n đều chia hết cho 3" có phải là mệnh đề không?

b) Phát biểu "Tồn tại số tự nhiên n chia hết cho 3" có phải là mệnh đề không?

- *Phát biểu "Mọi số tự nhiên n đều chia hết cho 3" là một mệnh đề. Có thể viết lại mệnh đề đó như sau: "Với mọi số tự nhiên n, n đều chia hết cho 3".*
- *Phát biểu "Tồn tại số tự nhiên n chia hết cho 3" là một mệnh đề. Có thể viết lại mệnh đề đó như sau: "Tồn tại số tự nhiên n, n chia hết cho 3".*

Để viết gọn phát biểu: "Với mọi số tự nhiên n" ta dùng kí hiệu $\forall n \in \mathbb{N}$, ở đó kí hiệu "$\forall$" đọc là "với mọi". Khi đó, mệnh đề "Với mọi số tự nhiên n, n đều chia hết cho 3" có thể viết lại như sau: "$\forall n \in \mathbb{N}$, n đều chia hết cho 3".

Tương tự, để viết gọn phát biểu: "Tồn tại số tự nhiên n" ta dùng kí hiệu $\exists n \in \mathbb{N}$, ở đó kí hiệu "$\exists$" đọc là "tồn tại" hoặc "có một" (tồn tại một) hoặc "có ít nhất một" (tồn tại ít nhất một). Khi đó, mệnh đề "Tồn tại số tự nhiên n, n chia hết cho 3" có thể viết lại như sau: "$\exists n \in \mathbb{N}$, n chia hết cho 3".

Ví dụ 7

Sử dụng kí hiệu "$\forall$" để viết mỗi mệnh đề sau và xét xem mệnh đề đó là đúng hay sai, giải thích vì sao.

a) P: "Với mọi số thực x, $x^2 + 1 > 0$".

b) Q: "Với mọi số tự nhiên n, $n^2 + n$ chia hết cho 6".

Giải

a) Mệnh đề được viết là P: "$\forall x \in \mathbb{R}, x^2 + 1 > 0$". Để chứng minh mệnh đề P là đúng, ta làm như sau:

Xét một số thực x tuỳ ý, ta phải chứng tỏ rằng $x^2 + 1 > 0$. Thật vậy, ta có: $x^2 + 1 \geq 1 > 0$. Vậy mệnh đề P là mệnh đề đúng.

b) Mệnh đề được viết là Q: "$\forall n \in \mathbb{N}, (n^2 + n) \vdots 6$".

Để chứng minh mệnh đề Q là sai, ta cần chỉ ra một giá trị cụ thể của n để nhận được mệnh đề sai.

Thật vậy, chọn $n = 1$, ta thấy $n^2 + n = 2$ không chia hết cho 6. Vậy mệnh đề Q là mệnh đề sai.

Ví dụ 8

Sử dụng kí hiệu "$\exists$" để viết mỗi mệnh đề sau và xét xem mệnh đề đó là đúng hay sai, giải thích vì sao.

a) M: "Tồn tại số thực x sao cho $x^3 = -8$".

b) N: "Tồn tại số nguyên x sao cho $2x + 1 = 0$".

Giải

a) Mệnh đề được viết là M: "$\exists x \in \mathbb{R}, x^3 = -8$".

Để chứng tỏ mệnh đề M là đúng, ta cần chỉ ra một giá trị cụ thể của x để nhận được mệnh đề đúng. Thật vậy, chọn $x = -2$, ta thấy $(-2)^3 = -8$. Vậy mệnh đề M là mệnh đề đúng.

b) Mệnh đề được viết là N: "$\exists x \in \mathbb{Z}, 2x + 1 = 0$".

Để chứng minh mệnh đề N là sai, ta phải chứng tỏ rằng với số nguyên x tuỳ ý thì $2x + 1 \neq 0$. Thật vậy, xét một số nguyên x tuỳ ý, ta có $2x + 1$ không chia hết cho 2 nên $2x + 1 \neq 0$. Vì thế mệnh đề N là mệnh đề sai.

Chú ý: Cách làm ở *Ví dụ 7*, *Ví dụ 8* lần lượt cho chúng ta phương pháp chứng minh một mệnh đề có kí hiệu "$\forall$", có kí hiệu "$\exists$", là đúng hoặc sai.

8 Bạn An nói: "Mọi số thực đều có bình phương là một số không âm".

Bạn Bình phủ định lại câu nói của bạn An: "Có một số thực mà bình phương của nó là một số âm".

a) Sử dụng kí hiệu "$\forall$" để viết mệnh đề của bạn An.

b) Sử dụng kí hiệu "$\exists$" để viết mệnh đề của bạn Bình.

An: "$\forall x \in \mathbb{R}$, x^2 là một số $\underbrace{\text{không âm}}$"

Bình: "$\exists x \in \mathbb{R}$, x^2 là một số âm"

Cho mệnh đề "$P(x), x \in X$".

- Phủ định của mệnh đề "$\forall x \in X, P(x)$" là mệnh đề "$\exists x \in X, \overline{P(x)}$".
- Phủ định của mệnh đề "$\exists x \in X, P(x)$" là mệnh đề "$\forall x \in X, \overline{P(x)}$".

Ví dụ 9 Lập mệnh đề phủ định của mỗi mệnh đề sau:

a) $\forall x \in \mathbb{R}, |x| \geq x$;

b) $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 + 1 = 0$.

Giải

a) Phủ định của mệnh đề "$\forall x \in \mathbb{R}, |x| \geq x$" là mệnh đề "$\exists x \in \mathbb{R}, |x| < x$".

b) Phủ định của mệnh đề "$\exists x \in \mathbb{R}, x^2 + 1 = 0$" là mệnh đề "$\forall x \in \mathbb{R}, x^2 + 1 \neq 0$".

7 Phát biểu mệnh đề phủ định của mỗi mệnh đề sau:

a) Tồn tại số nguyên chia hết cho 3;

b) Mọi số thập phân đều viết được dưới dạng phân số.

BÀI TẬP

1. Trong các phát biểu sau, phát biểu nào là mệnh đề toán học?

a) Tích hai số thực trái dấu là một số thực âm.

b) Mọi số tự nhiên đều là số dương.

c) Có sự sống ngoài Trái Đất.

d) Ngày 1 tháng 5 là ngày Quốc tế Lao động.

2. Lập mệnh đề phủ định của mỗi mệnh đề sau và xét tính đúng sai của mệnh đề phủ định đó:

a) A: "$\dfrac{5}{1,2}$ là một phân số";

b) B: "Phương trình $x^2 + 3x + 2 = 0$ có nghiệm";

c) C: "$2^2 + 2^3 = 2^{2+3}$";

d) D: "Số 2 025 chia hết cho 15".

3. Cho n là số tự nhiên. Xét hai mệnh đề chứa biến:

P: "Số tự nhiên n chia hết cho 16";

Q: "Số tự nhiên n chia hết cho 8".

a) Phát biểu mệnh đề $P \Rightarrow Q$. Xét tính đúng sai của mệnh đề đó.

b) Phát biểu mệnh đề đảo của mệnh đề $P \Rightarrow Q$. Xét tính đúng sai của mệnh đề đó.

4. Cho tam giác ABC. Xét các mệnh đề:

P: "Tam giác ABC cân";

Q: "Tam giác ABC có hai đường cao bằng nhau".

Phát biểu mệnh đề $P \Leftrightarrow Q$ bằng bốn cách.

5. Dùng kí hiệu "$\forall$" hoặc "$\exists$" để viết các mệnh đề sau:

a) Có một số nguyên không chia hết cho chính nó;

b) Mọi số thực cộng với 0 đều bằng chính nó.

6. Phát biểu các mệnh đề sau:

a) $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geq 0$;

b) $\exists x \in \mathbb{R}, \dfrac{1}{x} > x$.

7. Lập mệnh đề phủ định của mỗi mệnh đề sau và xét tính đúng sai của mỗi mệnh đề phủ định đó:

a) $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \neq 2x - 2$;

b) $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \leq 2x - 1$;

c) $\exists x \in \mathbb{R}, x + \dfrac{1}{x} \geq 2$;

d) $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 - x + 1 < 0$.

§2 TẬP HỢP. CÁC PHÉP TOÁN TRÊN TẬP HỢP

Khái niệm tập hợp thường gặp trong toán học và trong đời sống. Chẳng hạn:

– Tập hợp *A* các học sinh của lớp 10D.

– Tập hợp *B* các học sinh tổ I của lớp 10D.

Làm thế nào để diễn tả quan hệ giữa tập hợp A và tập hợp B?

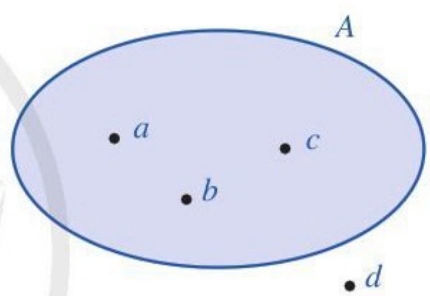
I. TẬP HỢP

1 Ở lớp 6, ta đã làm quen với khái niệm tập hợp, kí hiệu và cách viết tập hợp, phần tử thuộc tập hợp. Hãy nêu cách cho một tập hợp.

2 Người ta còn minh hoạ tập hợp bằng một vòng kín, mỗi phần tử của tập hợp được biểu diễn bởi một chấm bên trong vòng kín, còn phần tử không thuộc tập hợp đó được biểu diễn bởi một chấm bên ngoài vòng kín (*Hình 1*). Cách minh hoạ tập hợp như vậy được gọi là biểu đồ Ven.

a) Viết tập hợp *A* trong *Hình 1* bằng cách liệt kê các phần tử của tập hợp đó.

b) Nêu phần tử không thuộc tập hợp *A*.



Hình 1

Ví dụ 1 Cho tập hợp *B* gồm các số tự nhiên có một chữ số và chia hết cho 3.

a) Viết tập hợp *B* theo hai cách: liệt kê các phần tử của tập hợp; chỉ ra tính chất đặc trưng cho các phần tử của tập hợp đó.

b) Minh hoạ tập hợp *B* bằng biểu đồ Ven.

Giải

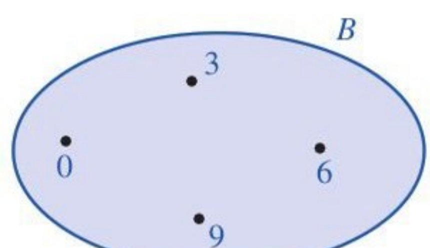
a) Tập hợp *B* được viết theo cách liệt kê các phần tử là:

$$B = \{0; 3; 6; 9\}.$$

Tập hợp *B* được viết theo cách chỉ ra tính chất đặc trưng cho các phần tử là:

$$B = \{x \in \mathbb{N} \mid 0 \leq x \leq 9 \text{ và } x \,\vdots\, 3\}.$$

b) Tập hợp *B* được minh hoạ bằng biểu đồ Ven ở *Hình 2*.



Hình 2

3 Nêu số phần tử của mỗi tập hợp sau:

$C = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 < 0\}$, $D = \{a\}$, $E = \{b; c; d\}$, $\mathbb{N} = \{0; 1; 2; ...\}$.

Nhận xét

- Tập hợp không chứa phần tử nào được gọi là tập hợp rỗng (tập rỗng), kí hiệu là $\varnothing$.
- Một tập hợp có thể không có phần tử nào, cũng có thể có một phần tử, có nhiều phần tử, có vô số phần tử.

Chú ý: Khi tập hợp C là tập hợp rỗng, ta viết $C = \varnothing$ và không được viết là $C = \{\varnothing\}$.

1 Nêu số phần tử của mỗi tập hợp sau:
$G = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + 1 = 0\}$,
$\mathbb{N}^* = \{1; 2; 3; ...\}$.

II. TẬP CON VÀ TẬP HỢP BẰNG NHAU

1. Tập con

4 Cho hai tập hợp:

$$A = \{x \in \mathbb{Z} \mid -3 < x < 3\},\ B = \{x \in \mathbb{Z} \mid -3 \le x \le 3\}.$$

a) Viết tập hợp A, B bằng cách liệt kê các phần tử của tập hợp.

b) Mỗi phần tử của tập hợp A có thuộc tập hợp B không?

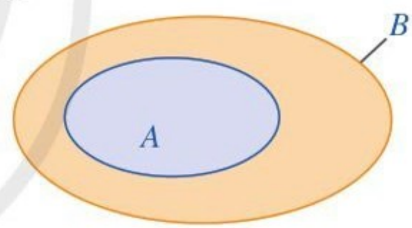
Nếu mọi phần tử của tập hợp A đều là phần tử của tập hợp B thì ta nói A là một *tập con* của B và viết là $A \subset B$. Ta còn đọc là A chứa trong B.

Quy ước: Tập hợp rỗng $\varnothing$ được coi là tập con của mọi tập hợp.

Chú ý: $A \subset B \Leftrightarrow (\forall x, x \in A \Rightarrow x \in B)$.

Khi $A \subset B$, ta cũng viết $B \supset A$ (đọc là B chứa A) (*Hình 3*).

Nếu A không phải là tập con của B, ta viết $A \not\subset B$.



Hình 3

Ví dụ 2 Cho hai tập hợp:

$$E = \{x \in \mathbb{R} \mid x \le 1\},\ F = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 2\}.$$

Chứng tỏ rằng $E \subset F$.

Giải

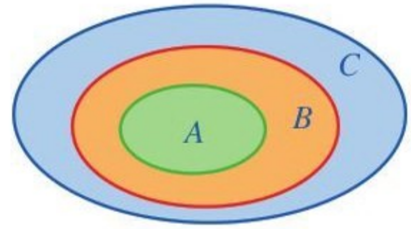
Với mọi số thực x, ta có: $x \le 1$ thì $x < 2$ nên $x \in E$ thì $x \in F$.

Do đó $E \subset F$.

2 Cho hai tập hợp:
$A = \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ chia hết cho } 3\}$,
$B = \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ chia hết cho } 9\}$.
Chứng tỏ rằng $B \subset A$.

Ta có các tính chất sau:

- $A \subset A$ với mọi tập hợp A;
- Nếu $A \subset B$ và $B \subset C$ thì $A \subset C$ (*Hình 4*).



Hình 4

2. Tập hợp bằng nhau

5 Cho hai tập hợp:

$A = \{0; 6; 12; 18\}$, $B = \{n \in \mathbb{N} \mid n \leq 18$ và n là bội của $6\}$.

Các mệnh đề sau có đúng không?

a) $A \subset B$; b) $B \subset A$.

Khi $A \subset B$ và $B \subset A$ thì ta nói hai tập hợp A và B *bằng nhau*, viết là $A = B$.

Ví dụ 3 Cho tập hợp C gồm các tam giác có ba cạnh bằng nhau và tập hợp D gồm các tam giác có ba góc bằng nhau. Hai tập hợp C và D có bằng nhau hay không?

Giải

Do một tam giác có ba cạnh bằng nhau khi và chỉ khi tam giác đó có ba góc bằng nhau nên hai tập hợp C và D là bằng nhau.

3 Cho hai tập hợp $E = \{n \in \mathbb{N} \mid n$ chia hết cho 3 và $4\}$ và $G = \{n \in \mathbb{N} \mid n$ chia hết cho $12\}$.

Chứng tỏ rằng $E = G$.

III. GIAO CỦA HAI TẬP HỢP

6 Lớp trưởng lập hai danh sách các bạn đăng kí tham gia câu lạc bộ thể thao như sau (biết trong lớp không có hai bạn nào cùng tên):

– Bóng đá gồm: An, Bình, Chung, Dũng, Minh, Nam, Phương;

– Bóng rổ gồm: An, Chung, Khang, Phong, Quang, Tuấn.

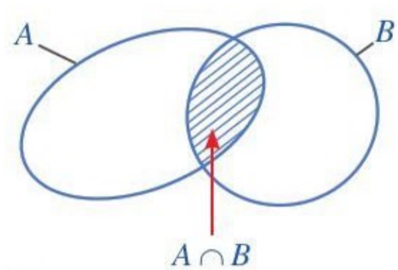
Hãy liệt kê danh sách các bạn đăng kí tham gia cả hai câu lạc bộ.

Tập hợp gồm tất cả các phần tử vừa thuộc tập hợp A vừa thuộc tập hợp B được gọi là *giao* của hai tập hợp A và B, kí hiệu $A \cap B$.

$x \in A \cap B$ khi và chỉ khi $x \in A$ và $x \in B$.

Vậy $A \cap B = \{x \mid x \in A$ và $x \in B\}$.

Tập hợp $A \cap B$ được minh hoạ bởi phần gạch chéo trong *Hình 5*.



Hình 5

Ví dụ 4 Tìm giao của hai tập hợp trong mỗi trường hợp sau:

a) $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x$ là ước của $16\}$, $B = \{x \in \mathbb{N} \mid x$ là ước của $20\}$.

b) $C = \{x \in \mathbb{N} \mid x$ là bội của $4\}$, $D = \{x \in \mathbb{N} \mid x$ là bội của $5\}$.

Giải

a) $A = \{1; 2; 4; 8; 16\}$, $B = \{1; 2; 4; 5; 10; 20\}$. Vậy $A \cap B = \{1; 2; 4\}$.

Chú ý: A là tập hợp các ước tự nhiên của 16, B là tập hợp các ước tự nhiên của 20 nên $A \cap B$ là tập hợp các ước chung tự nhiên của 16 và 20.

b) $C \cap D = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ là bội của 4 và } x \text{ là bội của 5}\}$

$= \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ là bội chung của 4 và 5}\}$.

IV. HỢP CỦA HAI TẬP HỢP

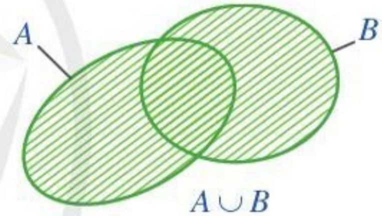
7 Hai trường dự định tổ chức giải thi đấu thể thao cho học sinh lớp 10. Trường thứ nhất đề xuất ba môn thi đấu là: Bóng bàn, Bóng đá, Bóng rổ. Trường thứ hai đề xuất ba môn thi đấu là: Bóng đá, Bóng rổ, Cầu lông. Lập danh sách những môn thi đấu mà cả hai trường đã đề xuất.

Tập hợp gồm các phần tử thuộc tập hợp A hoặc thuộc tập hợp B được gọi là *hợp* của hai tập hợp A và B, kí hiệu $A \cup B$.

$x \in A \cup B$ khi và chỉ khi $x \in A$ hoặc $x \in B$.

Vậy $A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ hoặc } x \in B\}$.

Tập hợp $A \cup B$ được minh hoạ bởi phần gạch chéo trong *Hình 6*.



Hình 6

Ví dụ 5 Cho tập hợp $\mathbb{Q}$ các số hữu tỉ và tập hợp I các số vô tỉ. Tìm $\mathbb{Q} \cap I$, $\mathbb{Q} \cup I$.

Giải

Ta có: $\mathbb{Q} \cap I = \varnothing$, $\mathbb{Q} \cup I = \mathbb{R}$.

4 Cho hai tập hợp:

$A = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 0\}$,

$B = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$.

Tìm $A \cap B$, $A \cup B$.

V. PHẦN BÙ. HIỆU CỦA HAI TẬP HỢP

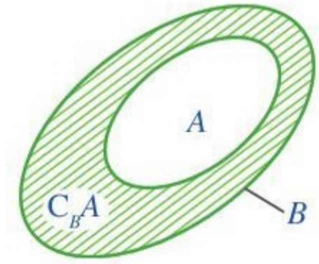
8 Gọi $\mathbb{R}$ là tập hợp các số thực, I là tập hợp các số vô tỉ. Khi đó $I \subset \mathbb{R}$.

Tìm tập hợp những số thực không phải là số vô tỉ.

Tập hợp những số thực không phải là số vô tỉ chính là tập hợp $\mathbb{Q}$ các số hữu tỉ.

Ta nói tập hợp $\mathbb{Q}$ các số hữu tỉ là phần bù của tập hợp I các số vô tỉ trong tập hợp $\mathbb{R}$.

Cho tập hợp A là tập con của tập hợp B. Tập hợp những phần tử thuộc B mà không thuộc A được gọi là *phần bù* của A trong B, kí hiệu C_BA.



Hình 7

Tập hợp C_BA được mô tả bằng phần gạch chéo trong *Hình 7*.

Ví dụ 6 Tất cả học sinh của lớp 10A đều đăng kí đi tham quan ở một trong hai địa điểm: Hoàng thành Thăng Long và Văn Miếu – Quốc Tử Giám. Mỗi học sinh chỉ đăng kí một địa điểm. Gọi A là tập hợp các học sinh đăng kí tham quan Hoàng thành Thăng Long, B là tập hợp các học sinh đăng kí tham quan Văn Miếu – Quốc Tử Giám, T là tập hợp các học sinh lớp 10A. Tìm phần bù của tập hợp A trong tập hợp T.

Giải. Phần bù của tập hợp A trong tập hợp T bao gồm những học sinh trong lớp không đăng kí tham quan Hoàng thành Thăng Long nên $C_TA = B$.

9 Cho hai tập hợp: $A = \{2; 3; 5; 7; 14\}$, $B = \{3; 5; 7; 9; 11\}$.

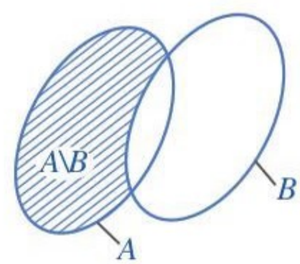
Liệt kê các phần tử thuộc tập hợp A nhưng không thuộc tập hợp B.

Tập hợp gồm các phần tử thuộc A nhưng không thuộc B được gọi là *hiệu* của A và B, kí hiệu $A \setminus B$.

$x \in A \setminus B$ khi và chỉ khi $x \in A$ và $x \notin B$.

Vậy $A \setminus B = \{x \mid x \in A$ và $x \notin B\}$.

Tập hợp $A \setminus B$ được minh hoạ bởi phần gạch chéo trong *Hình 8*.



Hình 8

Chú ý: Nếu $B \subset A$ thì $A \setminus B = C_AB$.

Ví dụ 7 Cho hai tập hợp: $A = \{3; 6; 9; 12\}$,

$B = \{2; 4; 6; 8; 10; 12\}$.

Tìm $A \setminus B$, $B \setminus A$.

Giải

- Tập hợp $A \setminus B$ gồm những phần tử thuộc A mà không thuộc B. Vậy $A \setminus B = \{3; 9\}$.
- Tập hợp $B \setminus A$ gồm những phần tử thuộc B mà không thuộc A. Vậy $B \setminus A = \{2; 4; 8; 10\}$.

5 Cho hai tập hợp:
$A = \{x \in \mathbb{Z} \mid -2 \le x \le 3\}$,
$B = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - x - 6 = 0\}$.
Tìm $A \setminus B$ và $B \setminus A$.

Ví dụ 8 Cho hai tập hợp: $A = \{x \in \mathbb{N} \mid 3x - 11 \le 0\}$,

$B = \{x \in \mathbb{Z} \mid 3x^2 - 14x + 11 = 0\}$.

Tìm $A \cap B$, $A \cup B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$.

Giải

Ta có: $A = \{0; 1; 2; 3\}$, $B = \{1\}$.

Vậy $A \cap B = \{1\}$, $A \cup B = \{0; 1; 2; 3\}$, $A \setminus B = \{0; 2; 3\}$, $B \setminus A = \varnothing$.

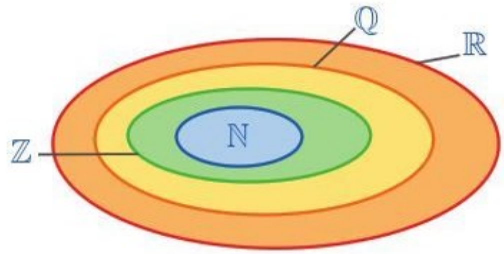
VI. CÁC TẬP HỢP SỐ

1. Các tập hợp số đã học

Ta đã biết $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ lần lượt là tập hợp số tự nhiên, tập hợp số nguyên, tập hợp số hữu tỉ, tập hợp số thực.

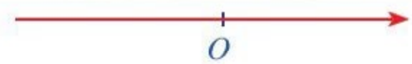
Ta có quan hệ sau:

$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ (*Hình 9*).



Hình 9

2. Một số tập con thường dùng của tập hợp số thực

Tập hợp	Tên gọi và kí hiệu	Biểu diễn trên trục số (Phần được tô màu đỏ)
$\mathbb{R}$	Tập hợp số thực $(-\infty ; +\infty)$	
$\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$	Đoạn $[a ; b]$	
$\{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$	Khoảng $(a ; b)$	
$\{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}$	Khoảng $(a ; +\infty)$	
$\{x \in \mathbb{R} \mid x < b\}$	Khoảng $(-\infty ; b)$	
$\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$	Nửa khoảng $[a ; b)$	
$\{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$	Nửa khoảng $(a ; b]$	
$\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq a\}$	Nửa khoảng $[a ; +\infty)$	
$\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq b\}$	Nửa khoảng $(-\infty ; b]$	

Kí hiệu $-\infty$ đọc là âm vô cực, kí hiệu $+\infty$ đọc là dương vô cực; a và b được gọi là đầu mút của các đoạn, khoảng, nửa khoảng.

Ta có thể biểu diễn tập hợp trên trục số bằng cách gạch bỏ phần không thuộc tập đó, chẳng hạn đoạn $[a ; b]$ có thể biểu diễn như sau:

Ví dụ 9 Cho hai tập hợp $A = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 \leq x \leq 1\}$ và $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x + 1 > 0\}$.

a) Hãy đọc tên, kí hiệu và biểu diễn mỗi tập hợp đã cho trên trục số.

b) Hãy xác định các tập hợp: $A \cap B$, $A \cup B$, $A \setminus B$, $C_{\mathbb{R}}B$.

Giải

a) Tập hợp A là đoạn $[-3 ; 1]$ và được biểu diễn là:

Tập hợp B là khoảng $(-1 ; +\infty)$ và được biểu diễn là:

b) Ta có:

$A \cap B = (-1 ; 1]$, $A \cup B = [-3 ; +\infty)$, $A \setminus B = [-3 ; -1]$, $C_{\mathbb{R}}B = (-\infty ; -1]$.

BÀI TẬP

1. Cho tập hợp $X = \{a; b; c\}$. Viết tất cả các tập con của tập hợp X.

2. Sắp xếp các tập hợp sau theo quan hệ "$\subset$":

$[2 ; 5]$, $(2 ; 5)$, $[2 ; 5)$, $(1 ; 5]$.

3. Xác định các tập hợp sau và biểu diễn chúng trên trục số:

a) $[-3 ; 7] \cap (2 ; 5)$;   b) $(-\infty ; 0] \cup (-1 ; 2)$;

c) $\mathbb{R} \setminus (-\infty ; 3)$;   d) $(-3 ; 2) \setminus [1 ; 3)$.

4. Gọi A là tập nghiệm của phương trình $x^2 + x - 2 = 0$,

B là tập nghiệm của phương trình $2x^2 + x - 6 = 0$.

Tìm $C = A \cap B$.

5. Tìm $D = E \cap G$ biết E và G lần lượt là tập nghiệm của hai bất phương trình trong mỗi trường hợp sau:

a) $2x + 3 \geq 0$ và $-x + 5 \geq 0$;

b) $x + 2 > 0$ và $2x - 9 < 0$.

6. Gọi A là tập nghiệm của đa thức $P(x)$. Viết tập hợp các số thực x sao cho biểu thức $\dfrac{1}{P(x)}$ xác định.

7. Lớp 10B có 28 học sinh tham gia câu lạc bộ thể thao và 19 học sinh tham gia câu lạc bộ âm nhạc. Biết rằng có 10 học sinh tham gia cả hai câu lạc bộ trên.

a) Có bao nhiêu học sinh ở lớp 10B tham gia câu lạc bộ thể thao và không tham gia câu lạc bộ âm nhạc?

b) Có bao nhiêu học sinh ở lớp 10B tham gia ít nhất một trong hai câu lạc bộ trên?

c) Biết lớp 10B có 40 học sinh. Có bao nhiêu học sinh không tham gia câu lạc bộ thể thao? Có bao nhiêu học sinh không tham gia cả hai câu lạc bộ?

8. Một nhóm có 12 học sinh chuẩn bị cho hội diễn văn nghệ. Trong danh sách đăng kí tham gia tiết mục múa và tiết mục hát của nhóm đó, có 5 học sinh tham gia tiết mục múa, 3 học sinh tham gia cả hai tiết mục. Hỏi có bao nhiêu học sinh trong nhóm tham gia tiết mục hát? Biết có 4 học sinh của nhóm không tham gia tiết mục nào.

BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG I

1. Phát biểu nào sau đây **không** là một mệnh đề toán học?

a) Tích của ba số tự nhiên liên tiếp luôn chia hết cho 3.

b) Nếu $\widehat{AMB} = 90^{\circ}$ thì M nằm trên đường tròn đường kính AB.

c) Ngày 2 tháng 9 là ngày Quốc Khánh của nước Cộng hoà xã hội chủ nghĩa Việt Nam.

d) Mọi số nguyên tố đều là số lẻ.

2. Lập mệnh đề phủ định của mỗi mệnh đề sau và xét tính đúng sai của mệnh đề phủ định đó.

A: "Đồ thị hàm số $y = x$ là một đường thẳng".

B: "Đồ thị hàm số $y = x^2$ đi qua điểm $A(3 ; 6)$".

3. Cho tứ giác $ABCD$. Lập mệnh đề $P \Rightarrow Q$ và xét tính đúng sai của mệnh đề đó với:

a) P: "Tứ giác $ABCD$ là hình chữ nhật", Q: "Tứ giác $ABCD$ là hình bình hành";

b) P: "Tứ giác $ABCD$ là hình thoi", Q: "Tứ giác $ABCD$ là hình vuông".

4. Lập mệnh đề phủ định của mỗi mệnh đề sau:

A: "$\forall x \in \mathbb{R}, |x| \geq x$"; B: "$\forall x \in \mathbb{R}, x^2 + x \geq 1$";

C: "$\exists x \in \mathbb{Z}, 2x^2 + 3x - 2 = 0$"; D: "$\exists x \in \mathbb{Z}, x^2 < x$".

5. Dùng kí hiệu để viết mỗi tập hợp sau và biểu diễn mỗi tập hợp đó trên trục số:

a) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x < -1\}$; b) $B = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 \leq x \leq 0\}$;

c) $C = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 1\}$; d) $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x > -2\}$.

6. Giải Bóng đá vô địch thế giới World Cup 2018 được tổ chức ở Liên bang Nga gồm 32 đội. Sau vòng thi đấu bảng, Ban tổ chức chọn ra 16 đội chia làm 8 cặp đấu loại trực tiếp. Sau vòng đấu loại trực tiếp đó, Ban tổ chức tiếp tục chọn ra 8 đội chia làm 4 cặp đấu loại trực tiếp ở vòng tứ kết. Gọi A là tập hợp 32 đội tham gia World Cup 2018, B là tập hợp 16 đội sau vòng thi đấu bảng, C là tập hợp 8 đội thi đấu vòng tứ kết.

a) Sắp xếp các tập hợp A, B, C theo quan hệ "$\subset$".

b) So sánh hai tập hợp $A \cap C$ và $B \cap C$.

c) Tập hợp $A \setminus B$ gồm những đội bóng bị loại sau vòng đấu nào?

7. Cho hai tập hợp: $A = [0 ; 3]$, $B = (2 ; +\infty)$. Xác định $A \cap B$, $A \cup B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$, $\mathbb{R} \setminus B$.

8. Gọi M là tập nghiệm của phương trình $x^2 - 2x - 3 = 0$,

N là tập nghiệm của phương trình $(x + 1)(2x - 3) = 0$.

Tìm $P = M \cap N$.

CHƯƠNG II

BẤT PHƯƠNG TRÌNH VÀ HỆ BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN

Trong chương này, chúng ta sẽ tìm hiểu những nội dung sau: bất phương trình bậc nhất hai ẩn; hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn và ứng dụng của chúng vào bài toán thực tiễn.

§1 BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN

Nhân dịp Tết Trung thu, một doanh nghiệp dự định sản xuất hai loại bánh: bánh nướng và bánh dẻo. Lượng đường cần cho mỗi chiếc bánh nướng, bánh dẻo lần lượt là 60 g, 50 g. Doanh nghiệp đã nhập về 500 kg đường.

Số bánh nướng và số bánh dẻo doanh nghiệp dự định sản xuất cần thoả mãn điều kiện ràng buộc gì để lượng đường sản xuất bánh không vượt quá lượng đường đã nhập về?

(*Nguồn: https://shutterstock.com*)

I. BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN

1 Trong bài toán ở phần mở đầu, ta gọi x, y lần lượt là số bánh nướng và số bánh dẻo doanh nghiệp dự định sản xuất (x, y là số tự nhiên). Nêu điều kiện ràng buộc đối với x và y để lượng đường sản xuất bánh không vượt quá lượng đường đã nhập về.

Điều kiện ràng buộc đối với x và y là: $0{,}06x + 0{,}05y \le 500$.

Điều kiện trên là một bất phương trình bậc nhất hai ẩn x, y.

Bất phương trình bậc nhất hai ẩn x, y là bất phương trình có một trong các dạng sau:

$$ax + by < c;\ ax + by > c;\ ax + by \le c;\ ax + by \ge c,$$

trong đó a, b, c là những số thực cho trước với a, b không đồng thời bằng 0, x và y là các ẩn.

Cho bất phương trình bậc nhất hai ẩn $ax + by < c$ (*).

Mỗi cặp số $(x_0; y_0)$ sao cho $ax_0 + by_0 < c$ được gọi là một *nghiệm* của bất phương trình (*).

Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, tập hợp các điểm có toạ độ là nghiệm của bất phương trình (*) được gọi là *miền nghiệm* của bất phương trình đó.

Nghiệm và miền nghiệm của các bất phương trình dạng $ax + by > c$, $ax + by \leq c$ và $ax + by \geq c$ được định nghĩa tương tự.

Ví dụ 1 Cặp số nào sau đây là nghiệm của bất phương trình $3x + 2y \geq -5$?

a) $(2 ; -1)$; b) $(-2 ; 0)$; c) $(-1 ; -1)$.

Giải

a) Thay $x = 2$, $y = -1$, ta có: $3 . 2 + 2 . (-1) \geq -5$ là mệnh đề đúng.

Vậy $(2 ; -1)$ là nghiệm của bất phương trình.

b) Thay $x = -2$, $y = 0$, ta có: $3 . (-2) + 2 . 0 \geq -5$ là mệnh đề sai.

Vậy $(-2 ; 0)$ không là nghiệm của bất phương trình.

c) Thay $x = -1$, $y = -1$, ta có: $3 . (-1) + 2 . (-1) \geq -5$ là mệnh đề đúng.

Vậy $(-1 ; -1)$ là nghiệm của bất phương trình.

1 Tìm bất phương trình bậc nhất hai ẩn trong các bất phương trình sau và chỉ ra một nghiệm của bất phương trình bậc nhất hai ẩn đó:

a) $5x + 3y < 20$;

b) $3x - \frac{5}{y} > 2$.

II. BIỂU DIỄN MIỀN NGHIỆM CỦA BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN

1. Mô tả miền nghiệm của bất phương trình bậc nhất hai ẩn

2 Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, xác định các điểm $M(x ; y)$ mà:

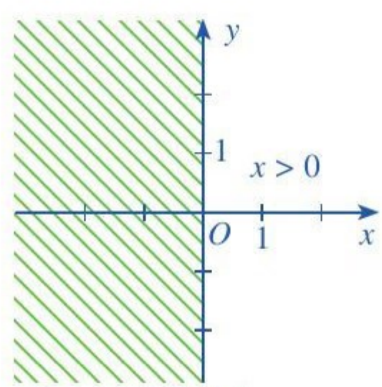
a) $x > 0$ (1); b) $y < 1$ (2).

Để xác định các điểm $M(x ; y)$ trong mặt phẳng toạ độ thoả mãn điều kiện đã cho, ta làm như sau:

a) Đường thẳng $x = 0$ chính là trục tung.

Đường thẳng $x = 0$ chia mặt phẳng thành hai nửa: nửa mặt phẳng bên trái và nửa mặt phẳng bên phải trục tung.

Một điểm có hoành độ dương thì nằm ở nửa mặt phẳng bên phải trục tung và ngược lại. Vì thế, miền nghiệm của bất phương trình (1) là nửa mặt phẳng bên phải trục tung, được mô tả bằng nửa mặt phẳng không bị gạch ở *Hình 1* (không kể trục tung).

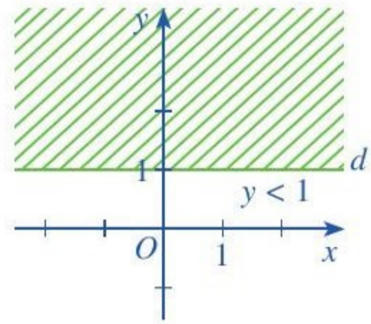


Hình 1

b) Vẽ đường thẳng $y = 1$.

Đường thẳng d: $y = 1$ chia mặt phẳng thành hai nửa: nửa mặt phẳng bên trên và nửa mặt phẳng bên dưới đường thẳng d (không kể đường thẳng d).

Một điểm có tung độ nhỏ hơn 1 thì nằm ở nửa mặt phẳng bên dưới đường thẳng d và ngược lại. Vì thế, miền nghiệm của bất phương trình (2) là nửa mặt phẳng bên dưới đường thẳng d, được mô tả bằng nửa mặt phẳng không bị gạch ở *Hình 2* (không kể đường thẳng d).



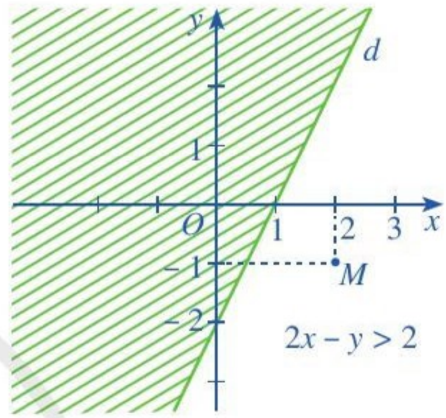
Hình 2

3 Cho bất phương trình $2x - y > 2$ (3).

a) Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, vẽ đường thẳng d: $2x - y = 2 \Leftrightarrow y = 2x - 2$.

b) Xét điểm $M(2 ; -1)$. Chứng tỏ $(2 ; -1)$ là nghiệm của bất phương trình (3).

c) Đường thẳng d chia mặt phẳng toạ độ thành hai nửa mặt phẳng. Gạch đi nửa mặt phẳng không chứa điểm $M(2 ; -1)$.



Hình 3

Miền nghiệm của bất phương trình (3) là nửa mặt phẳng không bị gạch trong Hình 3.

Người ta chứng minh được định lí sau:

Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, phương trình $ax + by = c$ (với a và b không đồng thời bằng 0) xác định một đường thẳng d như sau:

- d có phương trình là $x = \dfrac{c}{a}$ nếu $b = 0$;
- d có phương trình là $y = -\dfrac{a}{b}x + \dfrac{c}{b}$ nếu $b \neq 0$.

Ngoài ra, người ta cũng chứng minh được định lí sau:

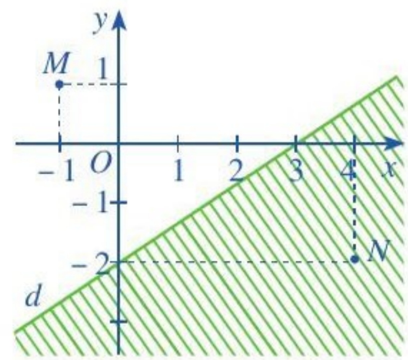
Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, đường thẳng d: $ax + by = c$ chia mặt phẳng thành hai nửa mặt phẳng. Một trong hai nửa mặt phẳng (không kể d) là *miền nghiệm* của bất phương trình $ax + by < c$, nửa mặt phẳng còn lại (không kể d) là *miền nghiệm* của bất phương trình $ax + by > c$.

Chú ý: Đối với bất phương trình dạng $ax + by \leq c$ hoặc $ax + by \geq c$ thì miền nghiệm là nửa mặt phẳng kể cả đường thẳng d.

Ví dụ 2 Nửa mặt phẳng không bị gạch trong *Hình 4* (không kể đường thẳng *d*) biểu diễn miền nghiệm của một bất phương trình bậc nhất hai ẩn. Hỏi toạ độ hai điểm $M(-1 ; 1)$, $N(4 ; -2)$ có là nghiệm của bất phương trình đó không?

Giải

- Điểm $M(-1 ; 1)$ thuộc nửa mặt phẳng không bị gạch nên $(-1 ; 1)$ là nghiệm của bất phương trình đó.
- Điểm $N(4 ; -2)$ thuộc nửa mặt phẳng bị gạch nên $(4 ; -2)$ không là nghiệm của bất phương trình đó.



Hình 4

2. Biểu diễn miền nghiệm của bất phương trình bậc nhất hai ẩn

Quy tắc thực hành biểu diễn miền nghiệm của bất phương trình bậc nhất hai ẩn như sau:

Các bước biểu diễn miền nghiệm của bất phương trình $ax + by < c$ trong mặt phẳng toạ độ Oxy:

Bước 1. Vẽ đường thẳng d: $ax + by = c$. Đường thẳng d chia mặt phẳng toạ độ thành hai nửa mặt phẳng.

Bước 2. Lấy một điểm $M(x_0 ; y_0)$ không nằm trên d (ta thường lấy gốc toạ độ O nếu $c \neq 0$). Tính $ax_0 + by_0$ và so sánh với c.

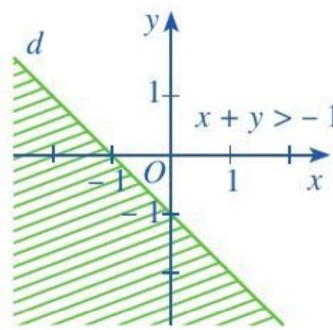
Bước 3. Kết luận

- Nếu $ax_0 + by_0 < c$ thì nửa mặt phẳng (không kể d) chứa điểm M là miền nghiệm của bất phương trình $ax + by < c$.
- Nếu $ax_0 + by_0 > c$ thì nửa mặt phẳng (không kể d) không chứa điểm M là miền nghiệm của bất phương trình $ax + by < c$.

Ví dụ 3 Biểu diễn miền nghiệm của mỗi bất phương trình sau: $x + y > -1$; $x + y \geq -1$.

Giải

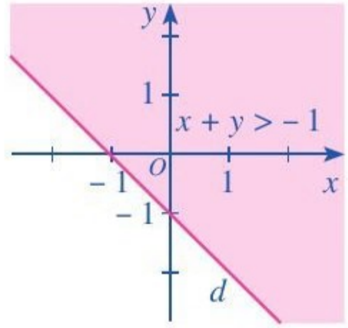
- Vẽ đường thẳng d: $x + y = -1$.
- Lấy điểm $O(0 ; 0)$. Ta có: $0 + 0 = 0 > -1$.
- Vậy miền nghiệm của bất phương trình $x + y > -1$ là nửa mặt phẳng không bị gạch ở *Hình 5* chứa điểm $O(0; 0)$ không kể đường thẳng d; miền nghiệm của bất phương trình $x + y \geq -1$ là nửa mặt phẳng không bị gạch ở *Hình 5* chứa điểm $O(0; 0)$ kể cả đường thẳng d.



Hình 5

Chú ý: Thông thường khi sử dụng phần mềm toán học để biểu diễn miền nghiệm của bất phương trình bậc nhất hai ẩn, miền nghiệm của bất phương trình đó được tô màu.

Chẳng hạn, miền nghiệm của bất phương trình $x + y > -1$ được tô màu như *Hình 6*.



Hình 6

2 Biểu diễn miền nghiệm của mỗi bất phương trình sau:

a) $x - 2y < 4$;

b) $x + 3y \le 6$.

BÀI TẬP

1. Cặp số nào sau đây là nghiệm của bất phương trình $2x - 3y < 3$?

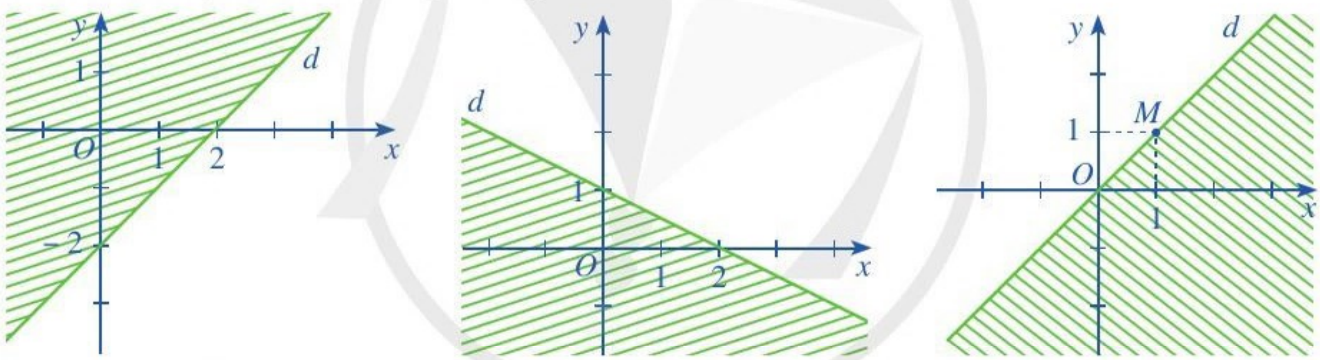
a) $(0 ; -1)$; b) $(2 ; 1)$; c) $(3 ; 1)$.

2. Biểu diễn miền nghiệm của mỗi bất phương trình sau:

a) $x + 2y < 3$; b) $3x - 4y \ge -3$;

c) $y \ge -2x + 4$; d) $y < 1 - 2x$.

3. Phần nửa mặt phẳng không bị gạch (không kể đường thẳng *d*) ở mỗi *Hình 7a*, *7b*, *7c* là miền nghiệm của bất phương trình nào?



Hình 7

4. Một gian hàng trưng bày bàn và ghế rộng 60 m^2. Diện tích để kê một chiếc ghế là 0,5 m^2, một chiếc bàn là 1,2 m^2. Gọi *x* là số chiếc ghế, *y* là số chiếc bàn được kê.

a) Viết bất phương trình bậc nhất hai ẩn *x*, *y* cho phần mặt sàn để kê bàn và ghế, biết diện tích mặt sàn dành cho lưu thông tối thiểu là 12 m^2.

b) Chỉ ra ba nghiệm của bất phương trình trên.

5. Trong 1 lạng (100 g) thịt bò chứa khoảng 26 g protein, 1 lạng cá rô phi chứa khoảng 20 g protein. Trung bình trong một ngày, một người phụ nữ cần tối thiểu 46 g protein. (*Nguồn: https://vinmec.com* và *https://thanhnien.vn*) Gọi *x*, *y* lần lượt là số lạng thịt bò và số lạng cá rô phi mà một người phụ nữ nên ăn trong một ngày. Viết bất phương trình bậc nhất hai ẩn *x*, *y* để biểu diễn lượng protein cần thiết cho một người phụ nữ trong một ngày và chỉ ra ba nghiệm của bất phương trình đó.

§2 HỆ BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN

Sảnh "Trống đồng" ở trụ sở của VTV tại Hà Nội
(Nguồn: Trịnh Hoàng Minh Quang)

Quảng cáo sản phẩm trên truyền hình là một hoạt động quan trọng trong kinh doanh của các doanh nghiệp.

Theo Thông báo số 10/2019, giá quảng cáo trên VTV1 là 30 triệu đồng cho 15 giây/1 lần quảng cáo vào khoảng 20h30; là 6 triệu đồng cho 15 giây/1 lần quảng cáo vào khung giờ 16h00 – 17h00.

Một công ty dự định chi không quá 900 triệu đồng để quảng cáo trên VTV1 với yêu cầu quảng cáo về số lần phát như sau: ít nhất 10 lần quảng cáo vào khoảng 20h30 và không quá 50 lần quảng cáo vào khung giờ 16h00 – 17h00. Gọi x, y lần lượt là số lần phát quảng cáo vào khoảng 20h30 và vào khung giờ 16h00 – 17h00.

Trong toán học, các điều kiện ràng buộc đối với x và y để đáp ứng nhu cầu trên của công ty được thể hiện như thế nào?

I. HỆ BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN

1 Cho hệ bất phương trình sau:

$$\begin{cases} x - y < 3 & (1) \\ x + 2y > -2 & (2) \end{cases}$$

a) Mỗi bất phương trình (1) và (2) có là bất phương trình bậc nhất hai ẩn không?

b) Chỉ ra một nghiệm chung của hai bất phương trình (1) và (2) trong hệ trên.

Hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn x, y là một hệ gồm hai hay nhiều bất phương trình bậc nhất hai ẩn x, y. Mỗi nghiệm chung của các bất phương trình trong hệ được gọi là một *nghiệm* của hệ bất phương trình đó.

Ví dụ 1 Cho hệ bất phương trình sau:

$$\begin{cases} 2x - 4y \le 6 & (1) \\ x + y > 2 & (2) \end{cases}$$

Cặp số $(x\ ;\ y)$ nào sau đây là nghiệm của hệ bất phương trình trên?

$$(3\ ;\ 1),\ (1\ ;\ -2),\ (5\ ;\ -3).$$

1 Chỉ ra một nghiệm của hệ bất phương trình sau:

$$\begin{cases} 2x + y > 0 \\ x - 3y < 6 \\ x - y \ge -4. \end{cases}$$

Giải

- Thay $x = 3$, $y = 1$ vào hai bất phương trình của hệ, ta có:

$2 \,.\, 3 - 4 \,.\, 1 \le 6$ là mệnh đề đúng; $3 + 1 > 2$ là mệnh đề đúng.

Vậy $(3 ; 1)$ là nghiệm chung của (1) và (2) nên $(3 ; 1)$ là nghiệm của hệ bất phương trình.

- Thay $x = 1$, $y = -2$ vào bất phương trình (2) của hệ, ta có:

$1 + (-2) > 2$ là mệnh đề sai.

Vậy $(1 ; -2)$ không là nghiệm của (2) nên $(1 ; -2)$ không là nghiệm của hệ bất phương trình.

- Thay $x = 5$, $y = -3$ vào bất phương trình (2) của hệ, ta có:

$5 + (-3) > 2$ là mệnh đề sai.

Vậy $(5 ; -3)$ không là nghiệm của (2) nên $(5 ; -3)$ không là nghiệm của hệ bất phương trình.

II. BIỂU DIỄN MIỀN NGHIỆM CỦA HỆ BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN

Cũng như bất phương trình bậc nhất hai ẩn, ta có thể biểu diễn miền nghiệm của hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn trên mặt phẳng toạ độ.

Miền nghiệm của hệ bất phương trình là giao các miền nghiệm của các bất phương trình trong hệ.

2 Cho hệ bất phương trình sau:

$$\begin{cases} x - 2y \ge -2 \\ 7x - 4y \le 16 \\ 2x + y \ge -4. \end{cases}$$

a) Trong cùng mặt phẳng toạ độ Oxy, biểu diễn miền nghiệm của mỗi bất phương trình trong hệ bất phương trình bằng cách gạch bỏ phần không thuộc miền nghiệm của nó.

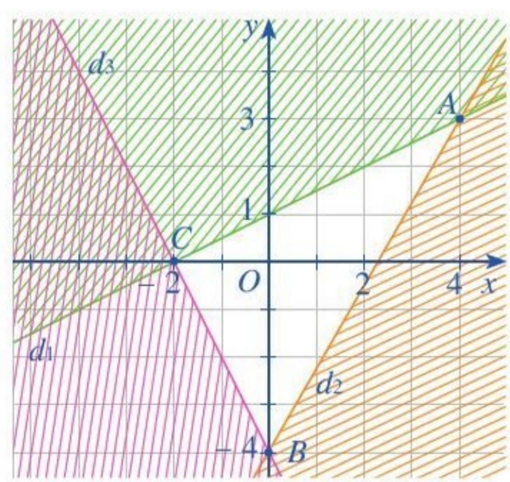
b) Tìm miền nghiệm của hệ bất phương trình đã cho.

Để biểu diễn miền nghiệm của hệ bất phương trình đã cho, ta làm như sau (*Hình 8*):

Bước 1. Trong cùng mặt phẳng toạ độ Oxy, vẽ ba đường thẳng:

d_1: $x - 2y = -2$; d_2: $7x - 4y = 16$; d_3: $2x + y = -4$.

Do toạ độ điểm $O(0 ; 0)$ thoả mãn các bất phương trình trong hệ nên miền nghiệm của từng bất phương trình trong hệ lần lượt là những nửa mặt phẳng không bị gạch chứa điểm $O(0 ; 0)$ (kể cả đường thẳng tương ứng).



Hình 8

Bước 2. Phần không bị gạch (chứa điểm $O(0 ; 0)$) là miền nghiệm của hệ bất phương trình đã cho.

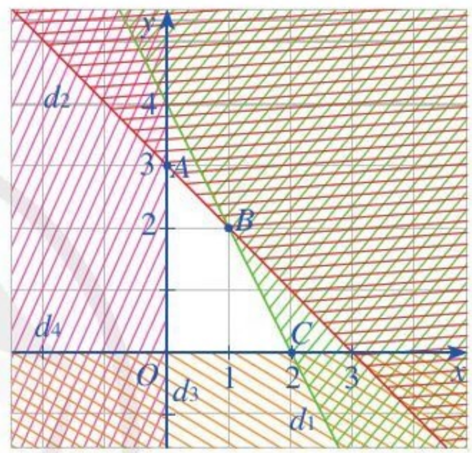
Cụ thể, miền nghiệm của hệ đã cho là tam giác ABC kể cả miền trong (còn gọi là miền tam giác ABC) với $A(4 ; 3)$, $B(0 ; -4)$, $C(-2 ; 0)$.

Để biểu diễn miền nghiệm của hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn, ta làm như sau:

- Trong cùng mặt phẳng toạ độ, biểu diễn miền nghiệm của mỗi bất phương trình trong hệ bằng cách gạch bỏ phần không thuộc miền nghiệm của nó.
- Phần không bị gạch là miền nghiệm cần tìm.

Ví dụ 2 Biểu diễn miền nghiệm của hệ bất phương trình:

$$\begin{cases} 2x + y \le 4 \\ x + y \le 3 \\ x \ge 0 \\ y \ge 0. \end{cases}$$



Hình 9

Giải. (*Hình 9*)

Vẽ các đường thẳng:

d_1: $2x + y = 4$; d_2: $x + y = 3$; d_3: $x = 0$ là trục tung; d_4: $y = 0$ là trục hoành.

Gạch đi các phần không thuộc miền nghiệm của mỗi bất phương trình.

Miền nghiệm của hệ bất phương trình là tứ giác $OABC$ kể cả miền trong (còn gọi là miền tứ giác $OABC$) với $O(0 ; 0)$, $A(0 ; 3)$, $B(1 ; 2)$, $C(2 ; 0)$.

2 Biểu diễn miền nghiệm của hệ bất phương trình sau:

$$\begin{cases} 3x - y > -3 \\ -2x + 3y < 6 \\ 2x + y > -4. \end{cases}$$

III. ÁP DỤNG VÀO BÀI TOÁN THỰC TIỄN

Bài toán 1. Trong bài toán ở phần mở đầu, tìm x và y sao cho tổng số lần xuất hiện quảng cáo của công ty là nhiều nhất.

Giải

Gọi x, y lần lượt là số lần phát quảng cáo vào khoảng 20h30 và vào khung giờ 16h00 – 17h00. Theo giả thiết, ta có: $x \in \mathbb{N}$, $y \in \mathbb{N}$, $x \ge 10$, $0 \le y \le 50$.

Tổng số lần phát quảng cáo là $T = x + y$.

Số tiền công ty cần chi là $30x + 6y$ (triệu đồng).

Do công ty dự định chi không quá 900 triệu đồng nên $30x + 6y \le 900$ hay $5x + y \le 150$.

Ta có hệ bất phương trình: $\begin{cases} 5x + y \le 150 \\ x \ge 10 \\ 0 \le y \le 50 \end{cases}$ (I)

Bài toán đưa về tìm các số tự nhiên x, y là nghiệm của hệ bất phương trình (I) sao cho $T = x + y$ có giá trị lớn nhất.

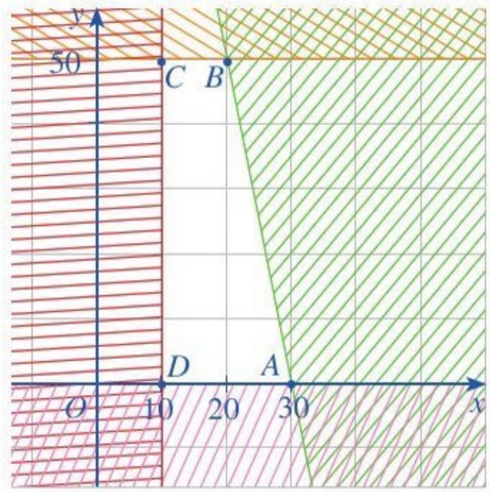
Trước hết, ta xác định miền nghiệm của hệ bất phương trình (I).

Miền nghiệm của hệ bất phương trình (I) là miền tứ giác $ABCD$ với $A(30 ; 0)$, $B(20 ; 50)$, $C(10 ; 50)$, $D(10 ; 0)$ (*Hình 10*).

Người ta chứng minh được: Biểu thức $T = x + y$ đạt giá trị lớn nhất tại một trong các đỉnh của tứ giác $ABCD$.

Tính giá trị của biểu thức $T = x + y$ tại cặp số $(x ; y)$ là toạ độ các đỉnh của tứ giác $ABCD$ rồi so sánh các giá trị đó. Ta được T đạt giá trị lớn nhất khi $x = 20$, $y = 50$ ứng với toạ độ đỉnh B.

Vậy để phát được số lần quảng cáo nhiều nhất thì số lần phát quảng cáo vào khoảng 20h30 là 20 lần và vào khung giờ 16h00 – 17h00 là 50 lần.



Hình 10

Bài toán 2. Người ta dự định dùng hai loại nguyên liệu để chiết xuất ít nhất 140 kg chất A và 9 kg chất B. Từ mỗi tấn nguyên liệu loại I giá 4 triệu đồng, có thể chiết xuất được 20 kg chất A và 0,6 kg chất B. Từ mỗi tấn nguyên liệu loại II giá 3 triệu đồng, có thể chiết xuất được 10 kg chất A và 1,5 kg chất B. Hỏi phải dùng bao nhiêu tấn nguyên liệu mỗi loại để chi phí mua nguyên liệu là ít nhất? Biết rằng cơ sở cung cấp nguyên liệu chỉ có thể cung cấp không quá 10 tấn nguyên liệu loại I và không quá 9 tấn nguyên liệu loại II.

Giải

Gọi x, y lần lượt là số tấn nguyên liệu loại I, loại II cần sử dụng.

Khi đó, ta chiết xuất được $20x + 10y$ (kg) chất A và $0,6x + 1,5y$ (kg) chất B.

Theo giả thiết, x và y phải thoả mãn các điều kiện:

$0 \le x \le 10$, $0 \le y \le 9$;

$20x + 10y \ge 140$ hay $2x + y \ge 14$;

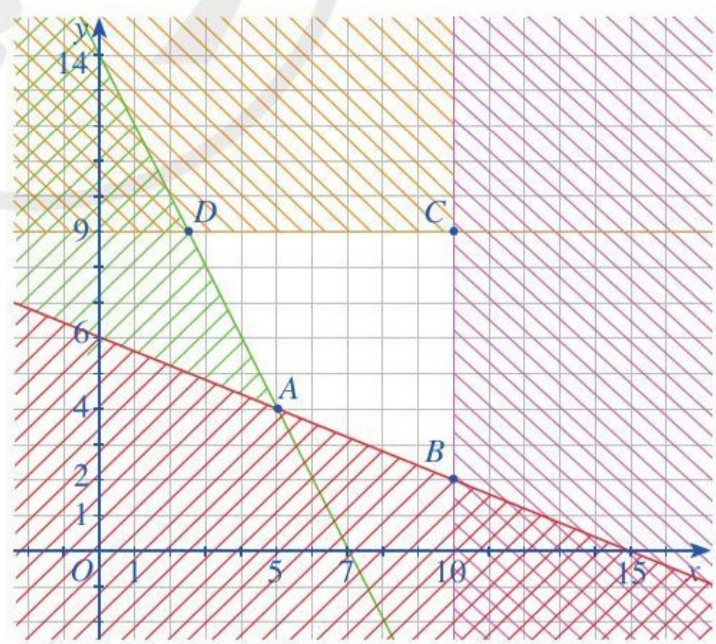
$0,6x + 1,5y \ge 9$ hay $2x + 5y \ge 30$.

Tổng số tiền cần mua nguyên liệu là $T = 4x + 3y$.

Bài toán đưa về: Tìm x, y là nghiệm của hệ bất phương trình

$$\begin{cases} 0 \le x \le 10 \\ 0 \le y \le 9 \\ 2x + y \ge 14 \\ 2x + 5y \ge 30 \end{cases} \quad \text{(II)}$$

sao cho $T = 4x + 3y$ có giá trị nhỏ nhất.



Hình 11

Trước hết, ta xác định miền nghiệm của hệ bất phương trình (II).

Miền nghiệm của hệ bất phương trình (II) là miền tứ giác $ABCD$ với $A(5; 4)$, $B(10; 2)$, $C(10; 9)$, $D\left(\dfrac{5}{2}; 9\right)$ (*Hình 11*).

Người ta chứng minh được: Biểu thức $T = 4x + 3y$ đạt giá trị nhỏ nhất tại một trong các đỉnh của tứ giác $ABCD$.

Tính giá trị của biểu thức $T = 4x + 3y$ tại cặp số $(x\ ;\ y)$ là toạ độ các đỉnh của tứ giác $ABCD$ rồi so sánh các giá trị đó. Ta được T đạt giá trị nhỏ nhất bằng 32 khi $x = 5$, $y = 4$ ứng với toạ độ đỉnh A.

Vậy để chi phí nguyên liệu là ít nhất, cần sử dụng 5 tấn nguyên liệu loại I và 4 tấn nguyên liệu loại II; khi đó chi phí là 32 triệu đồng.

BÀI TẬP

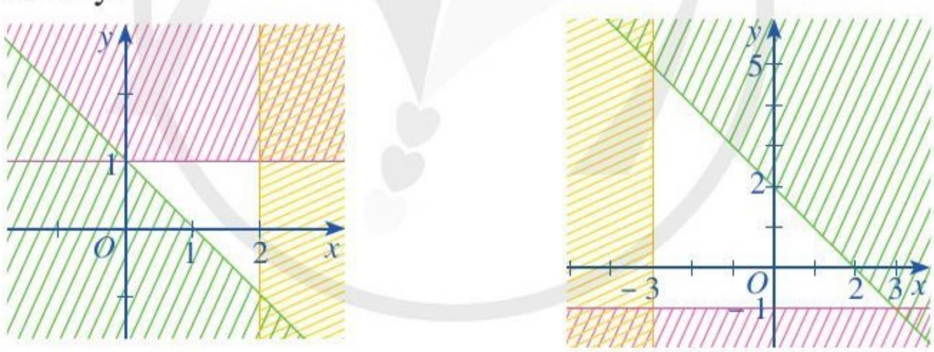
1. Kiểm tra xem mỗi cặp số $(x\ ;\ y)$ đã cho có là nghiệm của hệ bất phương trình tương ứng không.

a) $\begin{cases} 3x + 2y \geq -6 \\ x + 4y > 4 \end{cases}$ $(0\ ;\ 2), (1\ ;\ 0)$; b) $\begin{cases} 4x + y \leq -3 \\ -3x + 5y \geq -12 \end{cases}$ $(-1\ ;\ -3), (0\ ;\ -3)$.

2. Biểu diễn miền nghiệm của hệ bất phương trình:

a) $\begin{cases} x + 2y < -4 \\ y \geq x + 5; \end{cases}$ b) $\begin{cases} 4x - 2y > 8 \\ x \geq 0 \\ y \leq 0. \end{cases}$

3. Miền không bị gạch ở mỗi *Hình 12a*, *12b* là miền nghiệm của hệ bất phương trình nào cho ở dưới đây?



a) *b)*

Hình 12

a) $\begin{cases} x + y < 2 \\ x > -3 \\ y \geq -1; \end{cases}$ b) $\begin{cases} y < x \\ x \leq 0 \\ y > -3; \end{cases}$ c) $\begin{cases} y > -x + 1 \\ x \leq 2 \\ y < 1. \end{cases}$

4. Một phân xưởng sản xuất hai kiểu mũ. Thời gian để làm ra một chiếc mũ kiểu thứ nhất nhiều gấp hai lần thời gian làm ra một chiếc mũ kiểu thứ hai. Nếu chỉ sản xuất toàn kiểu mũ thứ hai thì trong 1 giờ phân xưởng làm được 60 chiếc. Phân xưởng làm việc 8 tiếng mỗi ngày và thị trường tiêu thụ tối đa trong một ngày là 200 chiếc mũ kiểu thứ nhất và 240 chiếc mũ kiểu thứ hai. Tiền lãi khi bán một chiếc mũ kiểu thứ nhất là 24 nghìn đồng, một chiếc mũ kiểu thứ hai là 15 nghìn đồng. Tính số lượng mũ kiểu thứ nhất và kiểu thứ hai trong một ngày mà phân xưởng cần sản xuất để tiền lãi thu được là cao nhất.

BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG II

1. Biểu diễn miền nghiệm của mỗi bất phương trình sau:

a) $3x - y > 3$; b) $x + 2y \le -4$; c) $y \ge 2x - 5$.

2. Biểu diễn miền nghiệm của mỗi hệ bất phương trình sau:

a) $\begin{cases} 2x - 3y < 6 \\ 2x + y < 2; \end{cases}$ b) $\begin{cases} 4x + 10y \le 20 \\ x - y \le 4 \\ x \ge -2; \end{cases}$ c) $\begin{cases} x - 2y \le 5 \\ x + y \ge 2 \\ x \ge 0 \\ y \le 3. \end{cases}$

3. Nhu cầu canxi tối thiểu cho một người đang độ tuổi trưởng thành trong một ngày là 1 300 mg. Trong 1 lạng đậu nành có 165 mg canxi, 1 lạng thịt có 15 mg canxi. (*Nguồn: https://hongngochospital.vn*)

Gọi x, y lần lượt là số lạng đậu nành và số lạng thịt mà một người đang độ tuổi trưởng thành ăn trong một ngày (với $x > 0$, $y > 0$).

a) Viết bất phương trình bậc nhất hai ẩn x, y để biểu diễn lượng canxi cần thiết trong một ngày của một người trong độ tuổi trưởng thành.

b) Chỉ ra một nghiệm $(x_0 ; y_0)$ với $x_0, y_0 \in \mathbb{N}$ của bất phương trình đó.

4. Bác Ngọc thực hiện chế độ ăn kiêng với yêu cầu tối thiểu hằng ngày qua thức uống là 300 calo, 36 đơn vị vitamin A và 90 đơn vị vitamin C. Một cốc đồ uống ăn kiêng thứ nhất cung cấp 60 calo, 12 đơn vị vitamin A và 10 đơn vị vitamin C. Một cốc đồ uống ăn kiêng thứ hai cung cấp 60 calo, 6 đơn vị vitamin A và 30 đơn vị vitamin C.

a) Viết hệ bất phương trình mô tả số lượng cốc cho đồ uống thứ nhất và thứ hai mà bác Ngọc nên uống mỗi ngày để đáp ứng nhu cầu cần thiết đối với số calo và số đơn vị vitamin hấp thụ.

b) Chỉ ra hai phương án mà bác Ngọc có thể chọn lựa số lượng cốc cho đồ uống thứ nhất và thứ hai nhằm đáp ứng nhu cầu cần thiết đối với số calo và số đơn vị vitamin hấp thụ.

5. Một chuỗi nhà hàng ăn nhanh bán đồ ăn từ 10h00 sáng đến 22h00 mỗi ngày. Nhân viên phục vụ của nhà hàng làm việc theo hai ca, mỗi ca 8 tiếng, ca I từ 10h00 đến 18h00 và ca II từ 14h00 đến 22h00.

Tiền lương của nhân viên được tính theo giờ (bảng bên).

Khoảng thời gian làm việc	Tiền lương/giờ
10h00 – 18h00	20 000 đồng
14h00 – 22h00	22 000 đồng

Để mỗi nhà hàng hoạt động được thì cần tối thiểu 6 nhân viên trong khoảng 10h00 – 18h00, tối thiểu 24 nhân viên trong thời gian cao điểm 14h00 – 18h00 và không quá 20 nhân viên trong khoảng 18h00 – 22h00. Do lượng khách trong khoảng 14h00 – 22h00 thường đông hơn nên nhà hàng cần số nhân viên ca II ít nhất phải gấp đôi số nhân viên ca I. Em hãy giúp chủ chuỗi nhà hàng chỉ ra cách huy động số lượng nhân viên cho mỗi ca sao cho chi phí tiền lương mỗi ngày là ít nhất.

CHƯƠNG III HÀM SỐ VÀ ĐỒ THỊ

Trong chương này, chúng ta sẽ tìm hiểu những nội dung sau: hàm số và đồ thị, hàm số bậc hai và ứng dụng, dấu của tam thức bậc hai, bất phương trình bậc hai một ẩn, cách giải hai dạng phương trình vô tỉ.

§1 HÀM SỐ VÀ ĐỒ THỊ

Galileo Galilei (1564 – 1642), sinh tại thành phố Pisa (Italia), là nhà bác học vĩ đại của thời kì Phục Hưng. Ông được mệnh danh là "cha đẻ của khoa học hiện đại". Trước Galileo, người ta tin rằng vật nặng rơi nhanh hơn vật nhẹ, ông đã bác bỏ điều này bằng thí nghiệm nổi tiếng ở tháp nghiêng Pisa. Từ thí nghiệm của Galileo, các nhà khoa học sau này được truyền cảm hứng rằng chúng ta chỉ có thể rút ra tri thức khoa học từ các quy luật khách quan của tự nhiên, chứ không phải từ niềm tin.

Tháp nghiêng Pisa (Italia)
(*Nguồn: https://shutterstock.com*)

Làm thế nào để mô tả được mối liên hệ giữa thời gian t và quãng đường đi được S của vật rơi tự do? Làm thế nào để có được hình ảnh hình học minh hoạ mối liên hệ giữa hai đại lượng đó?

I. HÀM SỐ

1. Định nghĩa

1

Trong bài toán ở phần mở đầu, ta đã biết công thức tính quãng đường đi được S (m) của vật rơi tự do theo thời gian t (s) là: $S = \frac{1}{2}gt^2$, trong đó g là gia tốc rơi tự do, $g \approx 9{,}8$ m/s^2.

a) Với mỗi giá trị $t = 1$, $t = 2$, tính giá trị tương ứng của S.

b) Với mỗi giá trị của t có bao nhiêu giá trị tương ứng của S?

2

Để xây dựng phương án kinh doanh cho một loại sản phẩm, doanh nghiệp tính toán lợi nhuận y (đồng) theo công thức sau: $y = -200x^2 + 92\,000x - 8\,400\,000$, trong đó x là số sản phẩm loại đó được bán ra.

a) Với mỗi giá trị $x = 100$, $x = 200$, tính giá trị tương ứng của y.

b) Với mỗi giá trị của x có bao nhiêu giá trị tương ứng của y?

Một cách tổng quát, ta có định nghĩa sau:

Cho tập hợp khác rỗng $D \subset \mathbb{R}$. Nếu với mỗi giá trị của x thuộc D có một và chỉ một giá trị tương ứng của y thuộc tập hợp số thực $\mathbb{R}$ thì ta có một *hàm số*.

Ta gọi x là *biến số* và y là *hàm số* của x.

Tập hợp D được gọi là *tập xác định* của hàm số.

Kí hiệu hàm số: $y = f(x)$, $x \in D$.

Ví dụ 1

a) Diện tích S của hình tròn bán kính r được tính theo công thức $S = \pi r^2$. Hỏi S có phải là hàm số của r hay không? Giải thích.

b) Cho công thức $y^2 = x$. Hỏi y có phải là hàm số của x hay không? Giải thích.

Giải

a) S là hàm số của r vì mỗi giá trị của r chỉ cho đúng một giá trị của S.

b) y không phải là hàm số của x vì khi $x = 1$ thì ta tìm được hai giá trị tương ứng của y là 1 và -1.

1 Trong y học, một người cân nặng 60 kg chạy với tốc độ 6,5 km/h thì lượng calo tiêu thụ được tính theo công thức: $c = 4{,}7t$ (*Nguồn: https://irace.vn*), trong đó thời gian t được tính theo phút. Hỏi c có phải là hàm số của t không? Vì sao?

2. Cách cho hàm số

a) Hàm số cho bằng một công thức

Cùng với cách nói hàm số cho bằng công thức, ta cũng nói hàm số cho bằng biểu thức.

3 Cho hai hàm số $y = 2x + 1$ (1) và $y = \sqrt{x - 2}$ (2).

a) Nêu biểu thức xác định mỗi hàm số trên.

b) Tìm x sao cho mỗi biểu thức trên có nghĩa.

Tập xác định của hàm số $y = f(x)$ là tập hợp tất cả các số thực x sao cho biểu thức $f(x)$ có nghĩa.

Ví dụ 2 Tìm tập xác định của mỗi hàm số sau:

a) $y = \dfrac{1}{x}$;

b) $y = \sqrt{x - 1}$.

2 Tìm tập xác định của hàm số:

$$y = \frac{\sqrt{x + 2}}{x - 3}.$$

Giải

a) Biểu thức $\dfrac{1}{x}$ có nghĩa khi $x \neq 0$. Vì vậy, tập xác định của hàm số đã cho là:

$D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

b) Biểu thức $\sqrt{x-1}$ có nghĩa khi $x - 1 \geq 0$. Vì vậy, tập xác định của hàm số đã cho là:

$D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 1\} = [1 ; +\infty)$.

b) Hàm số cho bằng nhiều công thức

Một hàm số có thể được cho bằng nhiều công thức, như hàm số trong *Ví dụ 3* sau đây:

Ví dụ 3 Cho hàm số:

$$f(x) = \begin{cases} -1 \text{ nếu } x < 0 \\ 0 \text{ nếu } x = 0 \\ 1 \text{ nếu } x > 0. \end{cases}$$

a) Tìm tập xác định của hàm số trên.

b) Tính giá trị của hàm số khi $x = -2$; $x = 0$; $x = 2\,021$.

Giải

a) $f(x)$ có nghĩa khi $x < 0$, $x = 0$, $x > 0$ nên tập xác định của hàm số là $D = \mathbb{R}$.

b) $f(-2) = -1$; $f(0) = 0$; $f(2\,021) = 1$.

3 Cho hàm số:

$$y = \begin{cases} -x \text{ nếu } x < 0 \\ x \text{ nếu } x > 0. \end{cases}$$

a) Tìm tập xác định của hàm số trên.

b) Tính giá trị của hàm số khi $x = -1$; $x = 2\,022$.

Chú ý: Cho hàm số $y = f(x)$ với tập xác định là D. Khi biến số x thay đổi trong tập D thì tập hợp các giá trị y tương ứng được gọi là *tập giá trị* của hàm số đã cho.

Như trong *Ví dụ 3*, ta có: Ứng với các giá trị của x thì $f(x)$ chỉ nhận một trong ba giá trị -1; 0; 1 nên tập giá trị của hàm số đó là tập hợp $\{-1; 0; 1\}$.

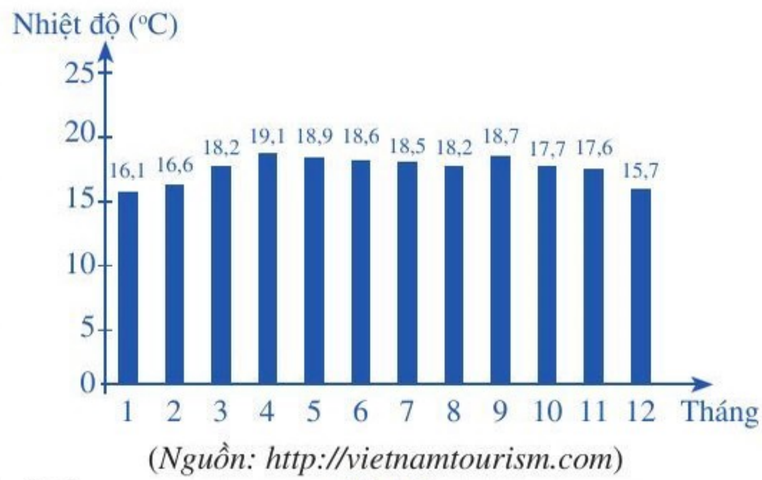
c) Hàm số không cho bằng công thức

Trong thực tiễn, có những tình huống dẫn tới những hàm số không thể cho bằng công thức (hoặc nhiều công thức). Chẳng hạn, trong ví dụ sau đây:

Ví dụ 4 Biểu đồ ở *Hình 1* cho biết nhiệt độ trung bình ở Đà Lạt theo từng tháng trong năm 2015.

a) Xác định tập hợp các tháng được nêu trong biểu đồ.

b) Tương ứng tháng với nhiệt độ trung bình của tháng đó có phải là hàm số không? Giải thích.



(*Nguồn: http://vietnamtourism.com*)

Hình 1

Giải

a) Tập hợp các tháng là
$D = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; 11; 12\}$.

b) Mỗi tháng chỉ tương ứng với đúng một giá trị nhiệt độ trung bình nên tương ứng đó xác định một hàm số. Hàm số đó có thể được cho bằng bảng như sau:

Tháng	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Nhiệt độ (°C)	16,1	16,6	18,2	19,1	18,9	18,6	18,5	18,2	18,7	17,7	17,6	15,7

II. ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ

4 Xét hàm số $y = f(x) = x^2$.

a) Tính các giá trị $y_1 = f(x_1)$, $y_2 = f(x_2)$ tương ứng với giá trị $x_1 = -1$, $x_2 = 1$.

b) Biểu diễn trong mặt phẳng toạ độ Oxy các điểm $M_1(x_1 ; y_1)$, $M_2(x_2 ; y_2)$.

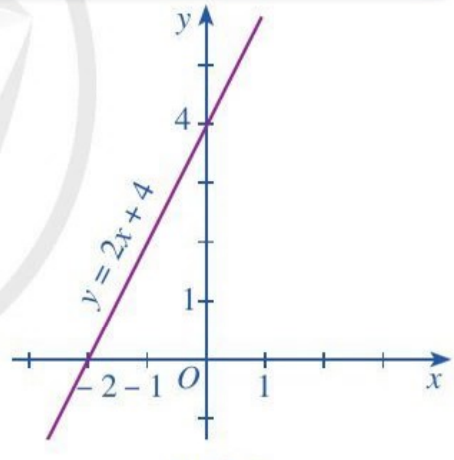
Cũng như vậy, với mỗi giá trị của biến số x, ta có thể xác định được điểm $M(x ; y)$ với $y = f(x)$ trong mặt phẳng toạ độ. Khi biến số x thay đổi trên tập xác định, điểm $M(x ; y)$ sẽ thay đổi theo trong mặt phẳng toạ độ Oxy và tạo nên một đường. Đường đó gọi là *đồ thị của hàm số* $y = f(x)$.

Đồ thị của hàm số $y = f(x)$ xác định trên tập hợp D là tập hợp các điểm $M(x ; f(x))$ trong mặt phẳng toạ độ Oxy với mọi x thuộc D.

Ví dụ 5 Cho hàm số $y = 2x + 4$.

a) Vẽ đồ thị hàm số trên.

b) Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho bốn điểm: $A(-1 ; 2)$, $B(1 ; 6)$, $C(2\,020 ; 2\,021)$, $D(2\,030 ; 4\,064)$. Điểm nào thuộc đồ thị hàm số trên? Điểm nào không thuộc đồ thị hàm số trên?



Hình 2

Giải

a) Khi $x = 0$ thì $y = 4$; khi $y = 0$ thì $x = -2$. Vậy đồ thị hàm số $y = 2x + 4$ là đường thẳng cắt trục Oy tại điểm $(0 ; 4)$, cắt trục Ox tại điểm $(-2 ; 0)$ (*Hình 2*).

b) Khi $x = -1$; $x = 1$; $x = 2\,020$; $x = 2\,030$ thì lần lượt $y = 2$; $y = 6$; $y = 4\,044$; $y = 4\,064$. Vậy các điểm $A(-1 ; 2)$, $B(1 ; 6)$, $D(2\,030 ; 4\,064)$ thuộc đồ thị hàm số và điểm $C(2\,020 ; 2\,021)$ không thuộc đồ thị hàm số.

Nhận xét

• Điểm $M(a ; b)$ trong mặt phẳng toạ độ *thuộc* đồ thị hàm số $y = f(x)$, $x \in D$ khi và chỉ khi $\begin{cases} a \in D \\ b = f(a). \end{cases}$

4 Cho hàm số $y = \dfrac{1}{x}$ và ba điểm $M(-1 ; -1)$, $N(0 ; 2)$, $P(2 ; 1)$. Điểm nào thuộc đồ thị hàm số trên? Điểm nào không thuộc đồ thị hàm số trên?

• Để chứng tỏ điểm $M(a\ ;\ b)$ trong mặt phẳng toạ độ *không thuộc* đồ thị hàm số $y = f(x)$, $x \in D$, ta có thể kiểm tra một trong hai khả năng sau:

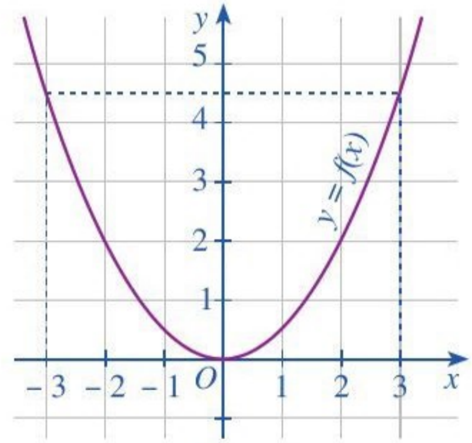
Khả năng 1: Chứng tỏ rằng $a \notin D$.

Khả năng 2: Khi $a \in D$ thì chứng tỏ rằng $b \neq f(a)$.

Ví dụ 6 Cho đồ thị hàm số $y = f(x)$ như *Hình 3*.

a) Trong các điểm có toạ độ $(-2\ ;\ 2)$, $(0\ ;\ 0)$, $(0\ ;\ 1)$, $(2\ ;\ 2)$, $(1\ ;\ 1)$, điểm nào thuộc đồ thị hàm số? Điểm nào không thuộc đồ thị hàm số?

b) Quan sát đồ thị, tìm $f(3)$ và những điểm thuộc đồ thị có tung độ bằng $\dfrac{9}{2}$.



Hình 3

Giải

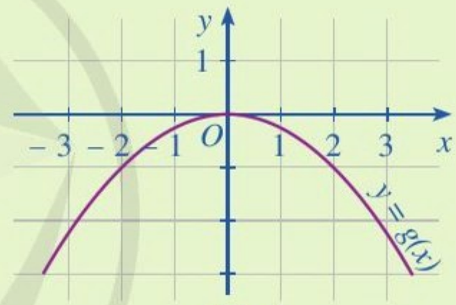
a) Các điểm thuộc đồ thị hàm số có toạ độ là: $(-2\ ;\ 2)$, $(0\ ;\ 0)$, $(2\ ;\ 2)$.

Các điểm không thuộc đồ thị hàm số có toạ độ là: $(0\ ;\ 1)$, $(1\ ;\ 1)$.

b) Quan sát đồ thị, ta có: $f(3) = \dfrac{9}{2}$.

Toạ độ những điểm thuộc đồ thị có tung độ bằng $\dfrac{9}{2}$ là: $\left(-3\ ;\ \dfrac{9}{2}\right)$, $\left(3\ ;\ \dfrac{9}{2}\right)$.

5 Dựa vào *Hình 4*, xác định $g(-2)$, $g(0)$, $g(2)$.



Hình 4

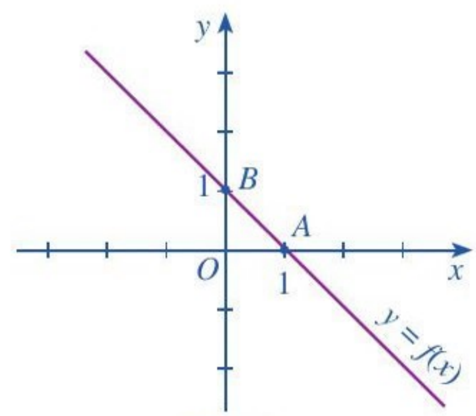
Ví dụ 7 Cho đồ thị hàm số $y = f(x)$ như *Hình 5*.

a) Xác định toạ độ các giao điểm của đồ thị đó với hai trục toạ độ.

b) Hàm số $y = f(x)$ được xác định bởi công thức nào?

Giải

a) Toạ độ giao điểm của đồ thị với trục hoành là $(1\ ;\ 0)$.
Toạ độ giao điểm của đồ thị với trục tung là $(0\ ;\ 1)$.



Hình 5

b) Vì đồ thị hàm số $y = f(x)$ là đường thẳng cắt cả hai trục toạ độ nên hàm số đó là hàm số bậc nhất, tức là $y = f(x) = ax + b$ $(a \neq 0)$. Do hai điểm $A(1\ ;\ 0)$, $B(0\ ;\ 1)$ đều nằm trên đường thẳng $y = ax + b$ $(a \neq 0)$ nên ta có:

$$\begin{cases} a.1 + b = 0 \\ a.0 + b = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b = 0 \\ b = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 1. \end{cases}$$

Vậy $y = f(x) = -x + 1$.

III. SỰ BIẾN THIÊN CỦA HÀM SỐ

1. Khái niệm

5 Cho hàm số $f(x) = x + 1$.

a) So sánh $f(1)$ và $f(2)$.

b) Chứng minh rằng nếu $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ sao cho $x_1 < x_2$ thì $f(x_1) < f(x_2)$.

Như vậy, hàm số $f(x) = x + 1$ có tính chất sau đây: Khi x *tăng* thì $f(x)$ cũng *tăng*. Ta nói hàm số trên là *đồng biến* trên khoảng $(-\infty ; +\infty)$.

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(a ; b)$.

- Hàm số $y = f(x)$ gọi là *đồng biến* trên khoảng $(a ; b)$ nếu

$$\forall x_1, x_2 \in (a ; b), x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2).$$

- Hàm số $y = f(x)$ gọi là *nghịch biến* trên khoảng $(a ; b)$ nếu

$$\forall x_1, x_2 \in (a ; b), x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2).$$

Ví dụ 8 Chứng tỏ hàm số $y = 6x^2$ đồng biến trên khoảng $(0 ; +\infty)$.

Giải

Xét hai số bất kì $x_1, x_2 \in (0 ; +\infty)$ sao cho $x_1 < x_2$.

Ta có: $0 < x_1 < x_2$ nên $6x_1^2 < 6x_2^2$ hay $f(x_1) < f(x_2)$.

Vậy hàm số đồng biến trên khoảng $(0 ; +\infty)$.

6 Chứng tỏ hàm số $y = 6x^2$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty ; 0)$.

Nhận xét: Xét sự biến thiên của một hàm số là tìm các khoảng hàm số đồng biến và các khoảng hàm số nghịch biến. Kết quả xét sự biến thiên được tổng kết trong một *bảng biến thiên*.

Chẳng hạn, sau đây là bảng biến thiên của hàm số $y = 6x^2$:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
y	$+\infty$ ↘	0	↗ $+\infty$

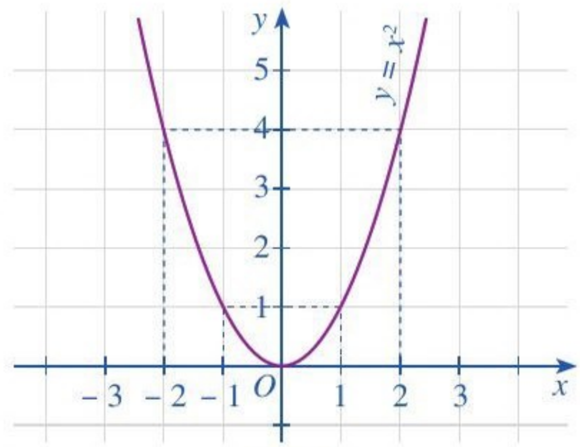
- Dấu mũi tên đi xuống (từ $+\infty$ đến 0) diễn tả hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty ; 0)$.
- Dấu mũi tên đi lên (từ 0 đến $+\infty$) diễn tả hàm số đồng biến trên khoảng $(0 ; +\infty)$.

2. Mô tả hàm số đồng biến, hàm số nghịch biến bằng đồ thị

6 Cho đồ thị hàm số: $y = f(x) = x^2$ như *Hình 6*.

a) So sánh $f(-2)$, $f(-1)$. Nêu nhận xét về sự biến thiên của giá trị hàm số khi giá trị biến x tăng dần từ -2 đến -1.

b) So sánh $f(1)$, $f(2)$. Nêu nhận xét về sự biến thiên của giá trị hàm số khi giá trị biến x tăng dần từ 1 đến 2.



Hình 6

Nhận xét

- Hàm số đồng biến trên khoảng $(a ; b)$ khi và chỉ khi đồ thị hàm số "đi lên" trên khoảng đó.
- Hàm số nghịch biến trên khoảng $(a ; b)$ khi và chỉ khi đồ thị hàm số "đi xuống" trên khoảng đó.

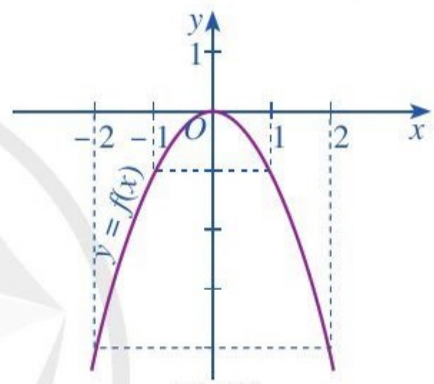
Khi nói đồ thị "đi lên" hay "đi xuống", ta luôn kể theo chiều tăng của biến số, nghĩa là kể từ trái qua phải.

Ví dụ 9 Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như *Hình 7*. Quan sát đồ thị và cho biết phát biểu nào sau đây là đúng.

a) Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-2 ; -1)$.

b) Hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(1 ; 2)$.

c) Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-1 ; 1)$.



Hình 7

Giải

a) Phát biểu "Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-2 ; -1)$" là đúng vì đồ thị hàm số đã cho "đi lên" trên khoảng đó.

b) Phát biểu "Hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(1 ; 2)$" là đúng vì đồ thị hàm số đã cho "đi xuống" trên khoảng đó.

c) Phát biểu "Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-1 ; 1)$" là sai vì đồ thị hàm số đã cho vừa có phần "đi lên" vừa có phần "đi xuống" trên khoảng đó.

BÀI TẬP

1. Tìm tập xác định của mỗi hàm số sau:

a) $y = -x^2$; b) $y = \sqrt{2 - 3x}$; c) $y = \dfrac{4}{x+1}$; d) $y = \begin{cases} 1 \text{ nếu } x \in \mathbb{Q} \\ 0 \text{ nếu } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$

2. *Bảng 1* dưới đây cho biết chỉ số $PM_{2,5}$ (bụi mịn) ở Thành phố Hà Nội từ tháng 1 đến tháng 12 của năm 2019.

	Trung bình năm 2019	Tháng											
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$PM_{2,5}$ ($\mu g/m^3$)	46,9	59,3	36,0	50,2	40,3	45,8	36,5	30,4	33,1	48,3	43,2	66,3	72,7

(*Nguồn: Báo cáo chất lượng không khí thế giới 2019*)

Bảng 1

a) Nêu chỉ số $PM_{2,5}$ trong tháng 2; tháng 5; tháng 10.

b) Chỉ số $PM_{2,5}$ có phải là hàm số của tháng không? Tại sao?

c) Bụi mịn $PM_{2,5}$ có đường kính nhỏ hơn 2,5 μm (mi-crô-mét) dễ dàng xâm nhập vào cơ thể con người thông qua đường hô hấp và gây nên một số bệnh nguy hiểm như đột quỵ, tim mạch,... Em hãy nêu một số biện pháp bảo vệ bản thân trước bụi mịn.

3. Theo quyết định số 2019/QĐ-BĐVN ngày 01/11/2018 của Tổng công ty Bưu điện Việt Nam, giá cước dịch vụ Bưu chính phổ cập đối với dịch vụ thư cơ bản và bưu thiếp trong nước có khối lượng đến 250 g như trong bảng sau:

Khối lượng đến 250 g	Mức cước (đồng)
Đến 20 g	4 000
Trên 20 g đến 100 g	6 000
Trên 100 g đến 250 g	8 000

a) Số tiền dịch vụ thư cơ bản phải trả y (đồng) có là hàm số của khối lượng thư cơ bản x (g) hay không? Nếu đúng, hãy xác định những công thức tính y.

b) Tính số tiền phải trả khi bạn Dương gửi thư có khối lượng 150 g, 200 g (không kể phụ phí và thuế VAT).

4. Cho hàm số $y = -2x^2$.

a) Tìm những điểm thuộc đồ thị hàm số có hoành độ lần lượt bằng – 2; 3 và 10.

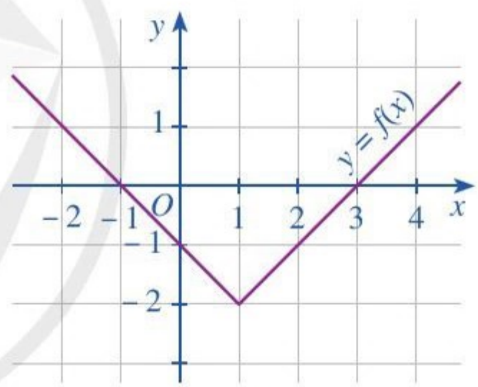
b) Tìm những điểm thuộc đồ thị hàm số có tung độ bằng – 18.

5. Cho đồ thị hàm số $y = f(x)$ như *Hình 8*.

a) Trong các điểm có toạ độ $(1 ; -2)$, $(0 ; 0)$, $(2 ; -1)$, điểm nào thuộc đồ thị hàm số? Điểm nào không thuộc đồ thị hàm số?

b) Xác định $f(0)$; $f(3)$.

c) Tìm điểm thuộc đồ thị có tung độ bằng 0.



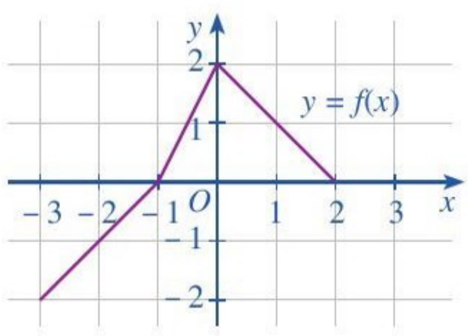
Hình 8

6. Cho hàm số $y = \frac{1}{x}$. Chứng tỏ hàm số đã cho:

a) Nghịch biến trên khoảng $(0 ; +\infty)$;

b) Nghịch biến trên khoảng $(-\infty ; 0)$.

7. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như *Hình 9*. Chỉ ra khoảng đồng biến và khoảng nghịch biến của hàm số $y = f(x)$.



Hình 9

8. Một lớp muốn thuê một chiếc xe khách cho chuyến tham quan với tổng đoạn đường cần di chuyển trong khoảng từ 550 km đến 600 km, có hai công ty được tiếp cận để tham khảo giá. Công ty *A* có giá khởi đầu là 3,75 triệu đồng cộng thêm 5 000 đồng cho mỗi ki-lô-mét chạy xe. Công ty *B* có giá khởi đầu là 2,5 triệu đồng cộng thêm 7 500 đồng cho mỗi ki-lô-mét chạy xe. Lớp đó nên chọn công ty nào để chi phí là thấp nhất?

§2 HÀM SỐ BẬC HAI. ĐỒ THỊ HÀM SỐ BẬC HAI VÀ ỨNG DỤNG

Cầu cảng Sydney là một trong những hình ảnh biểu tượng của thành phố Sydney và nước Australia. Độ cao y (m) của một điểm thuộc vòng cung thành cầu cảng Sydney có thể biểu thị theo độ dài x (m) tính từ chân cầu bên trái dọc theo đường nối với chân cầu bên phải như sau (*Hình 10*):

$$y = -0{,}00188(x - 251{,}5)^2 + 118.$$

(*Nguồn: https://shutterstock.com*)

Hình 10

Hàm số $y = -0{,}00188(x - 251{,}5)^2 + 118$ có gì đặc biệt?

I. HÀM SỐ BẬC HAI

1 Cho hàm số $y = -0{,}00188(x - 251{,}5)^2 + 118$.

a) Viết công thức xác định hàm số trên về dạng đa thức theo luỹ thừa với số mũ giảm dần của x.

b) Bậc của đa thức trên bằng bao nhiêu?

c) Xác định hệ số của x^2, hệ số của x và hệ số tự do.

> *Hàm số bậc hai* là hàm số được cho bằng biểu thức có dạng $y = ax^2 + bx + c$, trong đó a, b, c là những hằng số và a khác 0. Tập xác định của hàm số là $\mathbb{R}$.

Ví dụ 1 Trong các hàm số sau, hàm số nào là hàm số bậc hai? Với những hàm số bậc hai đó, xác định a, b, c lần lượt là hệ số của x^2, hệ số của x và hệ số tự do.

a) $y = 8x^2 - 6x + 1$; b) $y = 2x + 2\,021$.

Giải

a) Hàm số $y = 8x^2 - 6x + 1$ là hàm số bậc hai có hệ số của x^2 bằng 8, hệ số của x bằng -6, hệ số tự do bằng 1.

b) Hàm số $y = 2x + 2\,021$ không phải là hàm số bậc hai.

> **1** Cho hai ví dụ về hàm số bậc hai.

II. ĐỒ THỊ HÀM SỐ BẬC HAI

2 Cho hàm số $y = x^2 + 2x - 3$.

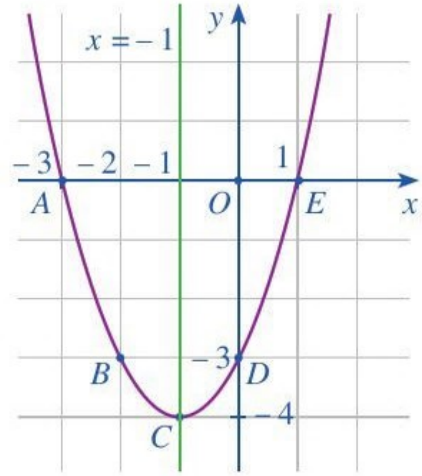
a) Tìm giá trị y tương ứng với giá trị của x trong bảng sau:

x	-3	-2	-1	0	1
y	?	?	?	?	?

b) Vẽ các điểm $A(-3 ; 0)$, $B(-2 ; -3)$, $C(-1 ; -4)$, $D(0 ; -3)$, $E(1 ; 0)$ của đồ thị hàm số $y = x^2 + 2x - 3$ trong mặt phẳng toạ độ Oxy.

c) Vẽ đường cong đi qua 5 điểm A, B, C, D, E. Đường cong đó là đường parabol và cũng chính là đồ thị hàm số $y = x^2 + 2x - 3$ (*Hình 11*).

d) Cho biết toạ độ của điểm thấp nhất và phương trình trục đối xứng của parabol đó. Đồ thị hàm số đó quay bề lõm lên trên hay xuống dưới?



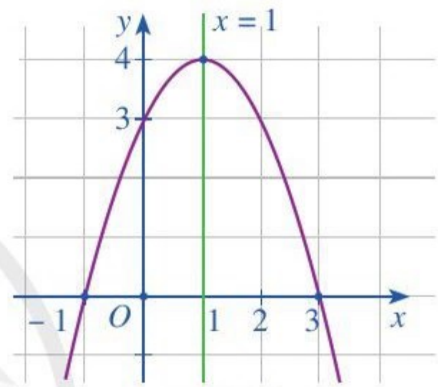
Hình 11

Nhận xét: Đường cong (liền nét) đi qua 5 điểm A, B, C, D, E (*Hình 11*) cho ta đồ thị hàm số $y = x^2 + 2x - 3$, $x \in \mathbb{R}$. Đó là đường parabol quay bề lõm lên trên, có toạ độ của điểm thấp nhất là $(-1; -4)$ và có trục đối xứng là đường thẳng $x = -1$.

3 Cho hàm số $y = -x^2 + 2x + 3$.

a) Tìm toạ độ 5 điểm thuộc đồ thị hàm số trên có hoành độ lần lượt là -1, 0, 1, 2, 3 rồi vẽ chúng trong mặt phẳng toạ độ Oxy.

b) Vẽ đường cong đi qua 5 điểm trên. Đường cong đó cũng là đường parabol và là đồ thị của hàm số $y = -x^2 + 2x + 3$ (*Hình 12*).



Hình 12

c) Cho biết toạ độ của điểm cao nhất và phương trình trục đối xứng của parabol đó. Đồ thị hàm số đó quay bề lõm lên trên hay xuống dưới?

Đồ thị hàm số bậc hai $y = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$ là một đường parabol có đỉnh là điểm với toạ độ $\left(-\dfrac{b}{2a} ; -\dfrac{\Delta}{4a}\right)$ và trục đối xứng là đường thẳng $x = -\dfrac{b}{2a}$.

Nhận xét: Cho hàm số $f(x) = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$, ta có: $-\dfrac{\Delta}{4a} = f\left(-\dfrac{b}{2a}\right)$.

Để vẽ đồ thị hàm số $y = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$, ta thực hiện các bước:

- Xác định toạ độ đỉnh: $\left(-\dfrac{b}{2a} ; -\dfrac{\Delta}{4a}\right)$;
- Vẽ trục đối xứng $x = -\dfrac{b}{2a}$;
- Xác định một số điểm đặc biệt, chẳng hạn: giao điểm với trục tung (có toạ độ $(0 ; c)$) và trục hoành (nếu có), điểm đối xứng với điểm có toạ độ $(0 ; c)$ qua trục đối xứng $x = -\dfrac{b}{2a}$.

• Vẽ đường parabol đi qua các điểm đã xác định ta nhận được đồ thị hàm số $y = ax^2 + bx + c$.

Chú ý: Nếu $a > 0$ thì parabol có bề lõm quay lên trên, nếu $a < 0$ thì parabol có bề lõm quay xuống dưới.

2 Vẽ đồ thị mỗi hàm số bậc hai sau:

a) $y = x^2 - 4x - 3$;

b) $y = x^2 + 2x + 1$;

c) $y = -x^2 - 2$.

Ví dụ 2 Vẽ đồ thị hàm số bậc hai $y = x^2 - 2x - 3$.

Giải

Ta có: $a = 1, b = -2, c = -3, \Delta = (-2)^2 - 4 \,.\, 1 \,.\, (-3) = 16$.

– Toạ độ đỉnh $I(1\,;-4)$.

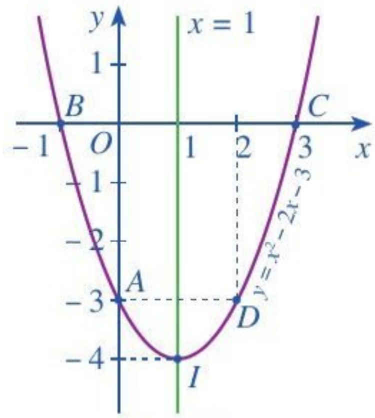
– Trục đối xứng $x = 1$.

– Giao điểm của parabol với trục tung là $A(0\,;-3)$.

– Giao điểm của parabol với trục hoành là $B(-1\,;0)$ và $C(3\,;0)$.

– Điểm đối xứng với điểm $A(0\,;-3)$ qua trục đối xứng $x = 1$ là $D(2\,;-3)$.

Vẽ parabol đi qua các điểm được xác định ở trên, ta nhận được đồ thị hàm số $y = x^2 - 2x - 3$ như *Hình 13*.



Hình 13

4

a) Quan sát đồ thị hàm số bậc hai $y = x^2 + 2x - 3$ trong *Hình 11*. Xác định khoảng đồng biến, khoảng nghịch biến của hàm số và lập bảng biến thiên của hàm số đó.

b) Quan sát đồ thị hàm số bậc hai $y = -x^2 + 2x + 3$ trong *Hình 12*. Xác định khoảng đồng biến, khoảng nghịch biến của hàm số và lập bảng biến thiên của hàm số đó.

Nhận xét: Cho hàm số bậc hai $y = ax^2 + bx + c \ (a \neq 0)$.

• Nếu $a > 0$ thì hàm số nghịch biến trên khoảng $\left(-\infty\,;-\dfrac{b}{2a}\right)$; đồng biến trên khoảng $\left(-\dfrac{b}{2a}\,;+\infty\right)$.

• Nếu $a < 0$ thì hàm số đồng biến trên khoảng $\left(-\infty\,;-\dfrac{b}{2a}\right)$; nghịch biến trên khoảng $\left(-\dfrac{b}{2a}\,;+\infty\right)$.

Ta có bảng biến thiên của hàm số bậc hai như sau:

$a > 0$

x	$-\infty$		$-\dfrac{b}{2a}$		$+\infty$
y	$+\infty$	↘	$-\dfrac{\Delta}{4a}$	↗	$+\infty$

$a < 0$

x	$-\infty$		$-\dfrac{b}{2a}$		$+\infty$
y	$-\infty$	↗	$-\dfrac{\Delta}{4a}$	↘	$-\infty$

Ví dụ 3 Nêu khoảng đồng biến, nghịch biến của mỗi hàm số sau:

a) $y = 3x^2 + 5x - 2$;   b) $y = -4x^2 + 6x + 3$.

Giải

a) Ta có: $a = 3 > 0$, $b = 5$, $-\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{5}{6}$.

Vậy hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $\left(-\infty; -\dfrac{5}{6}\right)$; đồng biến trên khoảng $\left(-\dfrac{5}{6}; +\infty\right)$.

b) Ta có: $a = -4 < 0$, $b = 6$, $-\dfrac{b}{2a} = \dfrac{3}{4}$.

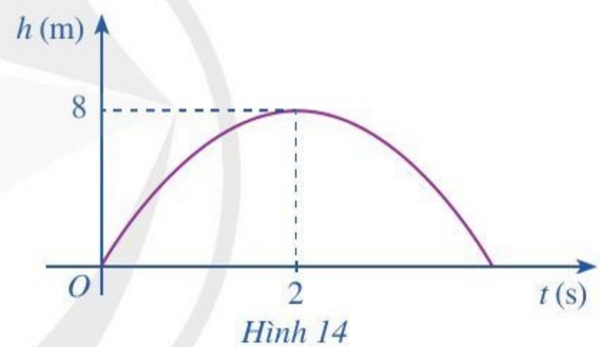
Vậy hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $\left(-\infty; \dfrac{3}{4}\right)$; nghịch biến trên khoảng $\left(\dfrac{3}{4}; +\infty\right)$.

> **3** Lập bảng biến thiên của mỗi hàm số sau:
>
> a) $y = x^2 - 3x + 4$;
>
> b) $y = -2x^2 + 5$.

III. ỨNG DỤNG

Các hàm số bậc hai có nhiều ứng dụng trong việc giải quyết những vấn đề thực tiễn. Chẳng hạn, ta sẽ tìm hiểu ứng dụng đó thông qua ví dụ sau:

Ví dụ 4 Khi một quả bóng được đá lên, nó sẽ đạt đến độ cao nào đó rồi rơi xuống. *Hình 14* minh hoạ quỹ đạo của quả bóng là một phần của cung parabol trong mặt phẳng toạ độ Oth, trong đó t là thời gian (tính bằng giây) kể từ khi quả bóng được đá lên và h là độ cao (tính bằng mét) của quả bóng. Giả thiết rằng quả bóng được đá từ mặt đất. Sau khoảng 2 s, quả bóng lên đến vị trí cao nhất là 8 m.



Hình 14

a) Tìm hàm số bậc hai biểu thị độ cao h theo thời gian t và có phần đồ thị trùng với quỹ đạo của quả bóng trong tình huống này.

b) Tính độ cao của quả bóng sau khi đá lên được 3 s.

c) Sau bao nhiêu giây thì quả bóng chạm đất kể từ khi đá lên?

Giải

a) Gọi hàm số bậc hai biểu thị độ cao h (m) theo thời gian t (s) là: $h = f(t) = at^2 + bt + c$ $(a < 0)$.

Theo giả thiết, quả bóng được đá lên từ mặt đất, nghĩa là $f(0) = c = 0$, do đó $f(t) = at^2 + bt$.

Sau 2 s, quả bóng lên đến vị trí cao nhất là 8 m nên

$$\begin{cases} -\dfrac{b}{2a} = 2 \\ f(2) = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -4a \\ 4a + 2b = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -4a \\ -4a = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b = 8. \end{cases}$$

Vậy $h = f(t) = -2t^2 + 8t$.

b) Độ cao của quả bóng sau khi đá lên được 3 s là:

$h = f(3) = -2 \cdot 3^2 + 8 \cdot 3 = 6$ (m).

c) *Cách 1.* Quả bóng chạm đất (trở lại) khi độ cao $h = 0$, tức là:

$$\begin{cases} t > 0 \\ -2t^2 + 8t = 0 \end{cases} \Leftrightarrow t = 4.$$

Vì thế sau 4 s quả bóng sẽ chạm đất kể từ khi đá lên.

4 Trong bài toán ở phần mở đầu, độ cao y (m) của một điểm thuộc vòng cung thành cầu cảng Sydney đạt giá trị lớn nhất là bao nhiêu mét (làm tròn kết quả đến hàng phần mười)?

Cách 2. Quỹ đạo chuyển động của quả bóng là một phần của cung parabol có trục đối xứng là đường thẳng $t = 2$. Điểm xuất phát và điểm quả bóng chạm đất (trở lại) đối xứng nhau qua đường thẳng $t = 2$. Vì thế sau 4 s quả bóng sẽ chạm đất kể từ khi đá lên.

BÀI TẬP

1. Trong các hàm số sau, hàm số nào là hàm số bậc hai? Với những hàm số bậc hai đó, xác định a, b, c lần lượt là hệ số của x^2, hệ số của x và hệ số tự do.

a) $y = -3x^2$; b) $y = 2x(x^2 - 6x + 1)$; c) $y = 4x(2x - 5)$.

2. Xác định parabol $y = ax^2 + bx + 4$ trong mỗi trường hợp sau:

a) Đi qua điểm $M(1 ; 12)$ và $N(-3 ; 4)$;

b) Có đỉnh là $I(-3 ; -5)$.

3. Vẽ đồ thị của mỗi hàm số sau:

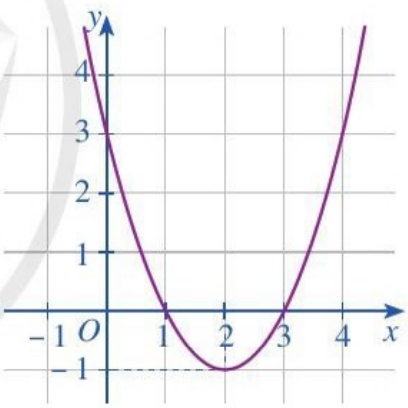
a) $y = 2x^2 - 6x + 4$; b) $y = -3x^2 - 6x - 3$.

4. Cho đồ thị hàm số bậc hai ở *Hình 15.*

a) Xác định trục đối xứng, toạ độ đỉnh của đồ thị hàm số.

b) Xác định khoảng đồng biến, khoảng nghịch biến của hàm số.

c) Tìm công thức xác định hàm số.



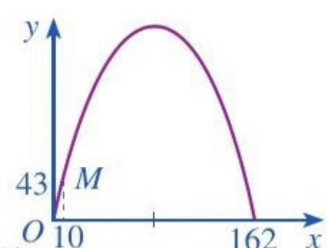
Hình 15

5. Nêu khoảng đồng biến, khoảng nghịch biến của mỗi hàm số sau:

a) $y = 5x^2 + 4x - 1$; b) $y = -2x^2 + 8x + 6$.

6. Khi du lịch đến thành phố St. Louis (Mỹ), ta sẽ thấy một cái cổng lớn có hình parabol hướng bề lõm xuống dưới, đó là cổng Arch. Giả sử ta lập một hệ toạ độ Oxy sao cho một chân cổng đi qua gốc O như *Hình 16* (x và y tính bằng mét), chân kia của cổng ở vị trí có toạ độ $(162 ; 0)$. Biết một điểm M trên cổng có toạ độ là $(10 ; 43)$. Tính chiều cao của cổng (tính từ điểm cao nhất trên cổng xuống mặt đất), làm tròn kết quả đến hàng đơn vị.

Cổng Arch (St.Louis, Mỹ)
(Nguồn: https://shutterstock.com)



Hình 16

§3 DẤU CỦA TAM THỨC BẬC HAI

Để xây dựng phương án kinh doanh cho một loại sản phẩm, doanh nghiệp tính toán lợi nhuận y (đồng) theo công thức sau: $y = -200x^2 + 92\,000x - 8\,400\,000$, trong đó x là số sản phẩm được bán ra. Như vậy, việc xác định lãi hay lỗ khi kinh doanh loại sản phẩm trên dẫn tới việc xét dấu của $y = -200x^2 + 92\,000x - 8\,400\,000$, tức là ta cần xét dấu của tam thức bậc hai $f(x) = -200x^2 + 92\,000x - 8\,400\,000$.

Làm thế nào để xét dấu của tam thức bậc hai?

Đa thức bậc hai $f(x) = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$ còn gọi là *tam thức bậc hai*. Sau đây, ta sẽ làm quen với việc xét dấu của tam thức bậc hai.

I. DẤU CỦA TAM THỨC BẬC HAI

Xét tam thức bậc hai $f(x) = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$.

Ta đã biết:

- $ax^2 + bx + c > 0$ ứng với phần parabol $y = ax^2 + bx + c$ nằm phía trên trục hoành.
- $ax^2 + bx + c < 0$ ứng với phần parabol $y = ax^2 + bx + c$ nằm phía dưới trục hoành.

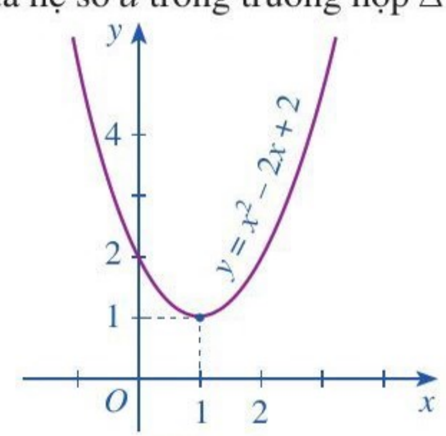
Như vậy, ta có thể nhận ra dấu của tam thức bậc hai $f(x) = ax^2 + bx + c$ là "+" (hoặc " – ") thông qua việc nhận ra phần parabol $y = ax^2 + bx + c$ nằm phía trên (hoặc phía dưới) trục hoành.

1

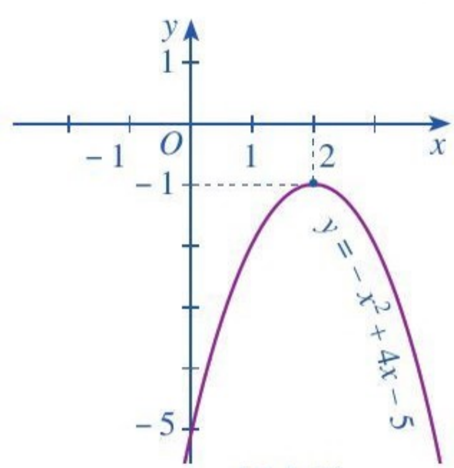
a) Quan sát *Hình 17* và cho biết dấu của tam thức bậc hai $f(x) = x^2 - 2x + 2$ trên $\mathbb{R}$.

b) Quan sát *Hình 18* và cho biết dấu của tam thức bậc hai $f(x) = -x^2 + 4x - 5$ trên $\mathbb{R}$.

c) Từ đó rút ra mối liên hệ về dấu của tam thức bậc hai $f(x) = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$ trên $\mathbb{R}$ với dấu của hệ số a trong trường hợp $\Delta < 0$.



Hình 17



Hình 18

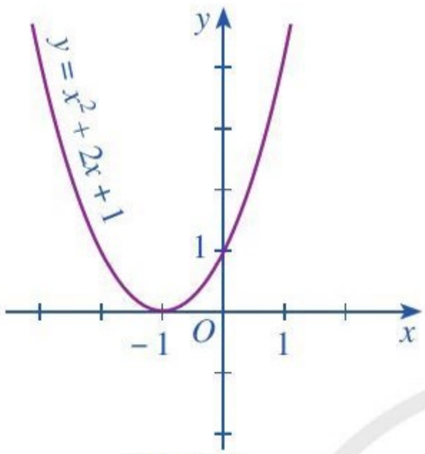
Nhận xét: Nếu $\Delta < 0$ thì $f(x)$ cùng dấu với hệ số a với mọi $x \in \mathbb{R}$.

2

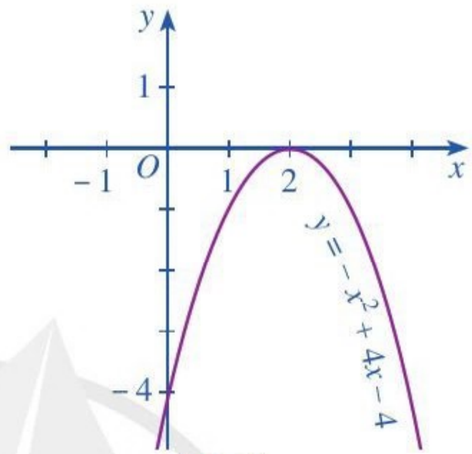
a) Quan sát *Hình 19* và cho biết dấu của tam thức bậc hai $f(x) = x^2 + 2x + 1$.

b) Quan sát *Hình 20* và cho biết dấu của tam thức bậc hai $f(x) = -x^2 + 4x - 4$.

c) Từ đó rút ra mối liên hệ về dấu của tam thức bậc hai $f(x) = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$ với dấu của hệ số a trong trường hợp $\Delta = 0$.



Hình 19



Hình 20

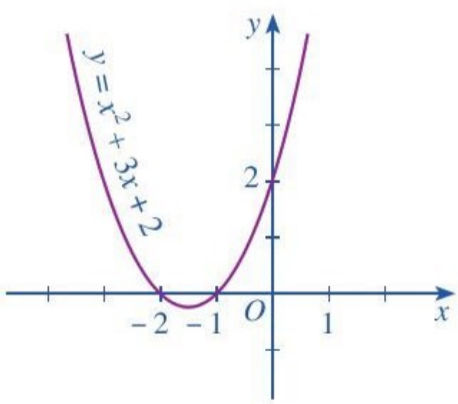
Nhận xét: Nếu $\Delta = 0$ thì $f(x)$ cùng dấu với hệ số a với mọi $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{-b}{2a}\right\}$.

3

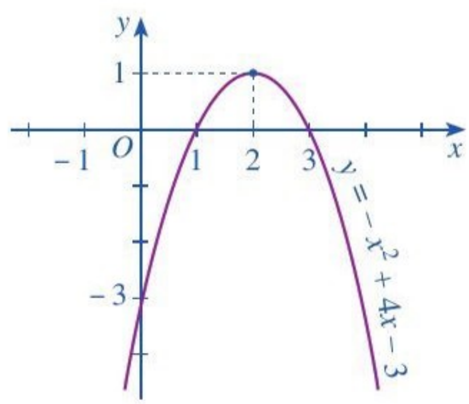
a) Quan sát *Hình 21* và cho biết dấu của tam thức bậc hai $f(x) = x^2 + 3x + 2$ tuỳ theo các khoảng của x.

b) Quan sát *Hình 22* và cho biết dấu của tam thức bậc hai $f(x) = -x^2 + 4x - 3$ tuỳ theo các khoảng của x.

c) Từ đó rút ra mối liên hệ về dấu của tam thức bậc hai $f(x) = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$ với dấu của hệ số a tuỳ theo các khoảng của x trong trường hợp $\Delta > 0$.



Hình 21



Hình 22

Nhận xét: Nếu $\Delta > 0$ thì $f(x)$ cùng dấu với hệ số a với mọi x thuộc các khoảng $(-\infty\,;x_1)$ và $(x_2\,;+\infty)$; $f(x)$ trái dấu với hệ số a với mọi x thuộc khoảng $(x_1\,;x_2)$, trong đó x_1, x_2 là hai nghiệm của $f(x)$ và $x_1 < x_2$.

Người ta đã chứng minh được định lí về dấu tam thức bậc hai sau:

Cho tam thức bậc hai $f(x) = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$, $\Delta = b^2 - 4ac$.

+ Nếu $\Delta < 0$ thì $f(x)$ cùng dấu với hệ số a với mọi $x \in \mathbb{R}$.

+ Nếu $\Delta = 0$ thì $f(x)$ cùng dấu với hệ số a với mọi $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{-b}{2a}\right\}$.

+ Nếu $\Delta > 0$ thì $f(x)$ có hai nghiệm x_1, x_2 $(x_1 < x_2)$. Khi đó:

$f(x)$ cùng dấu với hệ số a với mọi x thuộc các khoảng $(-\infty ; x_1)$ và $(x_2 ; +\infty)$;

$f(x)$ trái dấu với hệ số a với mọi x thuộc khoảng $(x_1 ; x_2)$.

Nhận xét: Trong định lí, có thể thay biệt thức $\Delta = b^2 - 4ac$ bằng biệt thức thu gọn $\Delta' = (b')^2 - ac$ với $b = 2b'$.

II. VÍ DỤ

Ví dụ 1 Xét dấu của mỗi tam thức bậc hai sau:

a) $f(x) = 3x^2 - x + 1$;

b) $f(x) = 4x^2 + 4x + 1$.

Giải

a) Tam thức bậc hai $f(x) = 3x^2 - x + 1$ có $\Delta = -11 < 0$, hệ số $a = 3 > 0$ nên $f(x) > 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

b) Tam thức bậc hai $f(x) = 4x^2 + 4x + 1$ có $\Delta = 0$, nghiệm kép $x_0 = -\frac{1}{2}$ và hệ số $a = 4 > 0$ nên $f(x) > 0$ với mọi $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{1}{2}\right\}$.

1 Xét dấu của mỗi tam thức bậc hai sau:

a) $f(x) = -2x^2 + 4x - 5$;

b) $f(x) = -x^2 + 6x - 9$.

Ví dụ 2 Lập bảng xét dấu của tam thức bậc hai $f(x) = x^2 - 3x + 2$.

Giải

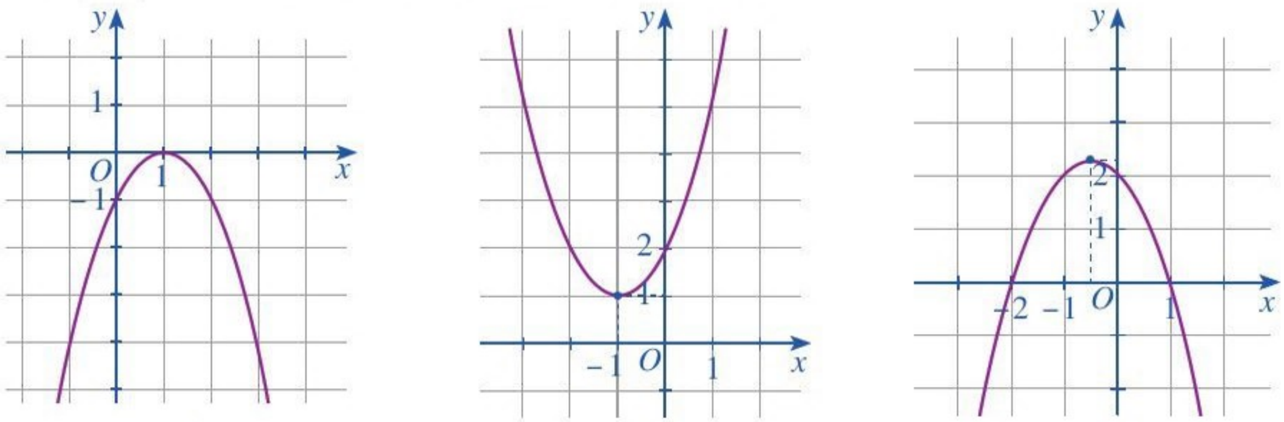
Tam thức bậc hai $f(x) = x^2 - 3x + 2$ có hai nghiệm phân biệt $x_1 = 1$, $x_2 = 2$ và hệ số $a = 1 > 0$.

Ta có bảng xét dấu của $f(x)$ như sau:

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

2 Lập bảng xét dấu của tam thức bậc hai: $f(x) = -x^2 - 2x + 8$.

Ví dụ 3 Tìm nghiệm và lập bảng xét dấu của tam thức bậc hai $f(x)$ ứng với đồ thị hàm số $y = f(x)$ được cho ở mỗi *Hình 23a*, *23b*, *23c*.



a) b) c)

Hình 23

Giải

a) Từ đồ thị *Hình 23a* ta có nghiệm của tam thức bậc hai $f(x)$ là $x = 1$. Bảng xét dấu của $f(x)$ là:

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$-$	

b) Từ đồ thị *Hình 23b* ta có tam thức bậc hai $f(x)$ vô nghiệm. Bảng xét dấu của $f(x)$ là:

x	$-\infty$		$+\infty$
$f(x)$		$+$	

c) Từ đồ thị *Hình 23c* ta có tam thức bậc hai $f(x)$ có hai nghiệm là $x_1 = -2$ và $x_2 = 1$. Bảng xét dấu của $f(x)$ là:

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Ví dụ 4 Trong bài toán ở phần mở đầu, dựa theo số sản phẩm bán ra, cho biết doanh nghiệp có lãi khi nào, bị lỗ khi nào.

Giải

Xét tam thức bậc hai $f(x) = -200x^2 + 92\,000x - 8\,400\,000$.

Nhận thấy $f(x)$ có hai nghiệm là $x_1 = \dfrac{-460 + \sqrt{43\,600}}{-2} \approx 125{,}6$; $x_2 = \dfrac{-460 - \sqrt{43\,600}}{-2} \approx 334{,}4$

và hệ số $a = -200 < 0$. Ta có bảng xét dấu của $f(x)$ như sau:

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Vì x là số nguyên dương nên:

+) Doanh nghiệp có lãi khi và chỉ khi $f(x) > 0$, tức là $126 \le x \le 334$.

+) Doanh nghiệp bị lỗ khi và chỉ khi $f(x) < 0$, tức là $x \le 125$ hoặc $x \ge 335$.

Vậy doanh nghiệp có lãi khi bán từ 126 đến 334 sản phẩm, doanh nghiệp bị lỗ khi bán tối đa 125 sản phẩm hoặc bán tối thiểu 335 sản phẩm.

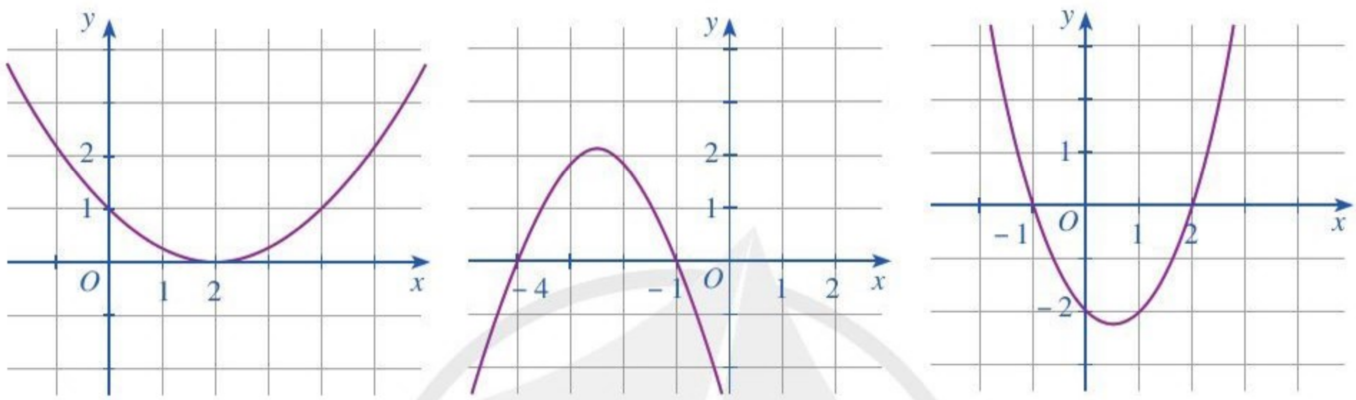
BÀI TẬP

1. Trong các phát biểu sau, phát biểu nào đúng, phát biểu nào sai?

a) $x^2 - 2x - 3 > 0$ khi và chỉ khi $x \in (-\infty\ ; -1) \cup (3\ ; +\infty)$.

b) $x^2 - 2x - 3 < 0$ khi và chỉ khi $x \in [-1\ ; 3]$.

2. Tìm nghiệm và lập bảng xét dấu của tam thức bậc hai $f(x)$ với đồ thị được cho ở mỗi *Hình 24a, 24b, 24c*.



a) *b)* *c)*

Hình 24

3. Xét dấu của mỗi tam thức bậc hai sau:

a) $f(x) = 3x^2 - 4x + 1$; b) $f(x) = 9x^2 + 6x + 1$; c) $f(x) = 2x^2 - 3x + 10$;

d) $f(x) = -5x^2 + 2x + 3$; e) $f(x) = -4x^2 + 8x - 4$; g) $f(x) = -3x^2 + 3x - 1$.

4. Một công ty du lịch thông báo giá tiền cho chuyến đi tham quan của một nhóm khách du lịch như sau:

50 khách đầu tiên có giá là 300 000 đồng/người. Nếu có nhiều hơn 50 người đăng kí thì cứ có thêm 1 người, giá vé sẽ giảm 5 000 đồng/người cho toàn bộ hành khách.

a) Gọi x là số lượng khách từ người thứ 51 trở lên của nhóm. Biểu thị doanh thu theo x.

b) Số người của nhóm khách du lịch nhiều nhất là bao nhiêu thì công ty không bị lỗ? Biết rằng chi phí thực sự cho chuyến đi là 15 080 000 đồng.

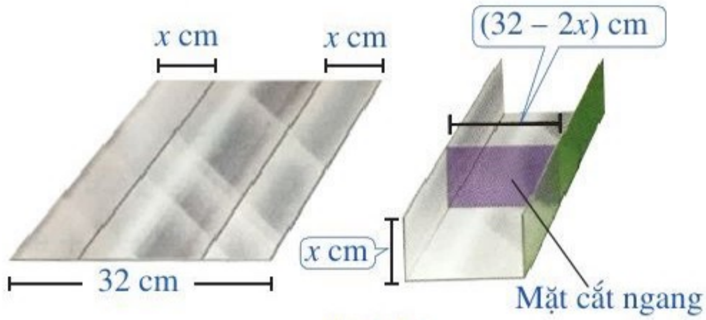
5. Bộ phận nghiên cứu thị trường của một xí nghiệp xác định tổng chi phí để sản xuất Q sản phẩm là $Q^2 + 180Q + 140\,000$ (nghìn đồng). Giả sử giá mỗi sản phẩm bán ra thị trường là 1 200 nghìn đồng.

a) Xác định lợi nhuận xí nghiệp thu được sau khi bán hết Q sản phẩm đó, biết rằng lợi nhuận là hiệu của doanh thu trừ đi tổng chi phí để sản xuất.

b) Xí nghiệp cần sản xuất bao nhiêu sản phẩm để không bị lỗ? Biết rằng các sản phẩm được sản xuất ra đều bán hết.

§4 BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI MỘT ẨN

Bác Dũng muốn uốn tấm tôn phẳng có dạng hình chữ nhật với bề ngang 32 cm thành một rãnh dẫn nước bằng cách chia tấm tôn đó thành ba phần rồi gấp hai bên lại theo một góc vuông (*Hình 25*). Để đảm bảo kĩ thuật, diện tích mặt cắt ngang của rãnh dẫn nước phải lớn hơn hoặc bằng 120 cm^2.



Hình 25

Rãnh dẫn nước phải có độ cao ít nhất là bao nhiêu xăng-ti-mét?

I. BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI MỘT ẨN

1 Quan sát và nêu đặc điểm của biểu thức ở vế trái của bất phương trình $3x^2 - 4x - 8 < 0$.

- *Bất phương trình bậc hai ẩn x* là bất phương trình có một trong các dạng sau: $ax^2 + bx + c < 0$; $ax^2 + bx + c \leq 0$; $ax^2 + bx + c > 0$; $ax^2 + bx + c \geq 0$, trong đó a, b, c là các số thực đã cho, $a \neq 0$.
- Đối với bất phương trình bậc hai có dạng $ax^2 + bx + c < 0$, mỗi số $x_0 \in \mathbb{R}$ sao cho $ax_0^2 + bx_0 + c < 0$ được gọi là một *nghiệm* của bất phương trình đó.

Tập hợp các nghiệm x_0 như thế còn được gọi là *tập nghiệm* của bất phương trình bậc hai đã cho.

Nghiệm và tập nghiệm của các dạng bất phương trình bậc hai ẩn x còn lại được định nghĩa tương tự.

Ví dụ 1 Cho bất phương trình bậc hai một ẩn $x^2 - 4x + 3 < 0$ (1). Trong các giá trị sau đây của x, giá trị nào là nghiệm của bất phương trình (1)?

a) $x = 2$; b) $x = 0$; c) $x = 3$.

Giải

a) Với $x = 2$, ta có: $2^2 - 4 \,.\, 2 + 3 = -1 < 0$. Vậy $x = 2$ là nghiệm của bất phương trình (1).

b) Với $x = 0$, ta có: $0^2 - 4 \,.\, 0 + 3 = 3 > 0$. Vậy $x = 0$ không phải là nghiệm của bất phương trình (1).

c) Với $x = 3$, ta có: $3^2 - 4 \,.\, 3 + 3 = 0$. Vậy $x = 3$ không phải là nghiệm của bất phương trình (1).

1 a) Cho hai ví dụ về bất phương trình bậc hai một ẩn.

b) Cho hai ví dụ về bất phương trình mà không phải là bất phương trình bậc hai một ẩn.

Chú ý: Giải bất phương trình bậc hai ẩn x là đi tìm tập nghiệm của bất phương trình đó.

II. GIẢI BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI MỘT ẨN

1. Giải bất phương trình bậc hai một ẩn bằng cách xét dấu của tam thức bậc hai

2

a) Lập bảng xét dấu của tam thức bậc hai $f(x) = x^2 - x - 2$.

b) Giải bất phương trình $x^2 - x - 2 > 0$.

Nhận xét: Để giải bất phương trình bậc hai (một ẩn) có dạng $f(x) > 0$ ($f(x) = ax^2 + bx + c$), ta chuyển việc giải bất phương trình đó về việc tìm tập hợp những giá trị của x sao cho $f(x)$ mang dấu "+". Cụ thể, ta làm như sau:

Bước 1. Xác định dấu của hệ số a và tìm nghiệm của $f(x)$ (nếu có).

Bước 2. Sử dụng định lí về dấu của tam thức bậc hai để tìm tập hợp những giá trị của x sao cho $f(x)$ mang dấu "+".

Chú ý: Các bất phương trình bậc hai có dạng $f(x) < 0$, $f(x) \geq 0$, $f(x) \leq 0$ được giải bằng cách tương tự.

Ví dụ 2 Giải các bất phương trình bậc hai sau:

a) $2x^2 - 5x + 2 > 0$;

b) $-x^2 - 2x + 8 > 0$.

Giải

a) Tam thức bậc hai $2x^2 - 5x + 2$ có hai nghiệm $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = 2$ và có hệ số $a = 2 > 0$.

Sử dụng định lí về dấu của tam thức bậc hai, ta thấy tập hợp những giá trị của x sao cho tam thức $2x^2 - 5x + 2$ mang dấu "+" là $\left(-\infty ; \frac{1}{2}\right) \cup (2 ; +\infty)$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình $2x^2 - 5x + 2 > 0$ là $\left(-\infty ; \frac{1}{2}\right) \cup (2 ; +\infty)$.

b) Tam thức bậc hai $-x^2 - 2x + 8$ có hai nghiệm $x_1 = -4$, $x_2 = 2$ và có hệ số $a = -1 < 0$.

Sử dụng định lí về dấu của tam thức bậc hai, ta thấy tập hợp những giá trị của x sao cho tam thức $-x^2 - 2x + 8$ mang dấu "+" là $(-4 ; 2)$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình $-x^2 - 2x + 8 > 0$ là $(-4 ; 2)$.

2 Giải các bất phương trình bậc hai sau:

a) $3x^2 - 2x + 4 \leq 0$;

b) $-x^2 + 6x - 9 \geq 0$.

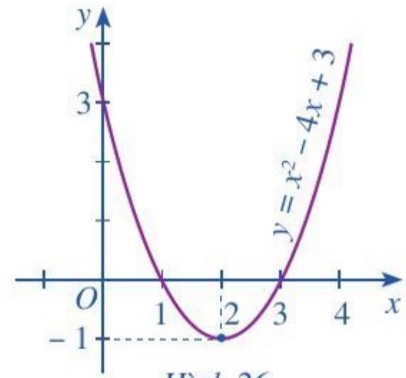
2. Giải bất phương trình bậc hai một ẩn bằng cách sử dụng đồ thị

3 Cho bất phương trình $x^2 - 4x + 3 > 0$ (2).

Quan sát parabol (P): $y = x^2 - 4x + 3$ ở *Hình 26* và cho biết:

a) Bất phương trình (2) biểu diễn phần parabol (*P*) nằm ở phía nào của trục hoành.

b) Phần parabol (*P*) nằm phía trên trục hoành ứng với những giá trị nào của x.



Hình 26

Bất phương trình (2) biểu diễn phần parabol (P) nằm phía trên trục hoành tương ứng với $x < 1$ hoặc $x > 3$.

Nhận xét

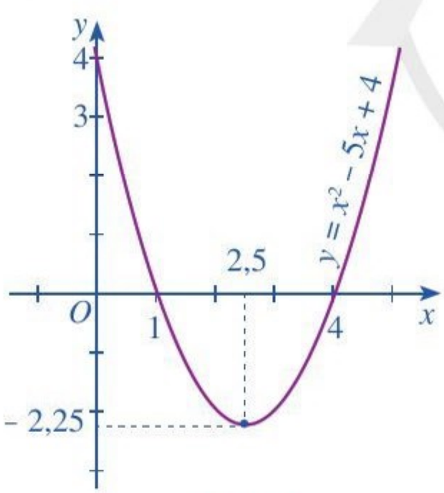
- *Giải bất phương trình bậc hai* $ax^2 + bx + c > 0$ là tìm tập hợp những giá trị của x ứng với phần parabol $y = ax^2 + bx + c$ nằm phía trên trục hoành.
- Tương tự, giải bất phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c < 0$ là tìm tập hợp những giá trị của x ứng với phần parabol $y = ax^2 + bx + c$ nằm phía dưới trục hoành.

Như vậy, để giải bất phương trình bậc hai (một ẩn) có dạng $f(x) > 0$ ($f(x) = ax^2 + bx + c$) bằng cách sử dụng đồ thị, ta có thể làm như sau: Dựa vào parabol $y = ax^2 + bx + c$, ta tìm tập hợp những giá trị của x ứng với phần parabol đó nằm phía trên trục hoành. Đối với các bất phương trình bậc hai có dạng $f(x) < 0$, $f(x) \geq 0$, $f(x) \leq 0$, ta cũng làm tương tự.

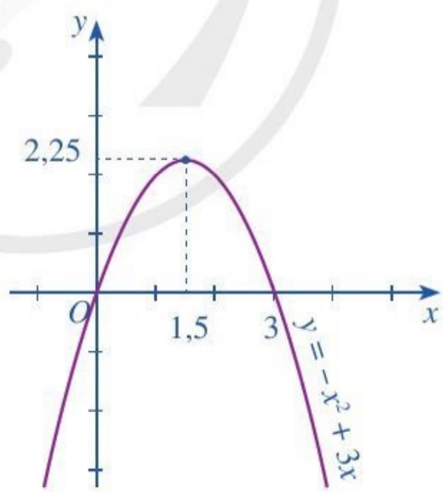
Ví dụ 3 Quan sát đồ thị ở *Hình 27, Hình 28* và giải các bất phương trình bậc hai sau:

a) $x^2 - 5x + 4 < 0$.

b) $-x^2 + 3x > 0$.



Hình 27



Hình 28

Giải

a) Quan sát đồ thị ở *Hình 27*, ta thấy: $x^2 - 5x + 4 < 0$ biểu diễn phần parabol $y = x^2 - 5x + 4$ nằm phía dưới trục hoành, tương ứng với $1 < x < 4$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình $x^2 - 5x + 4 < 0$ là khoảng $(1 ; 4)$.

3 Giải mỗi bất phương trình bậc hai sau bằng cách sử dụng đồ thị:

a) $x^2 + 2x + 2 > 0$;

b) $-3x^2 + 2x - 1 > 0$.

b) Quan sát đồ thị ở *Hình 28,* ta thấy: $-x^2+3x>0$ biểu diễn phần parabol $y=-x^2+3x$ nằm phía trên trục hoành, tương ứng với $0<x<3$. Vậy tập nghiệm của bất phương trình $-x^2+3x>0$ là khoảng $(0;3)$.

III. ỨNG DỤNG CỦA BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI MỘT ẨN

Bất phương trình bậc hai một ẩn có nhiều ứng dụng, chẳng hạn: giải một số hệ bất phương trình; ứng dụng vào tính toán lợi nhuận trong kinh doanh; tính toán điểm rơi trong pháo binh; ...

Chúng ta sẽ làm quen với những ứng dụng đó qua một số ví dụ sau đây.

Ví dụ 4 Giải bài toán ở phần mở đầu.

Giải

Khi chia tấm tôn đó thành ba phần rồi gấp hai bên lại theo một góc vuông như *Hình 25* thì kích thước của mặt cắt ngang là x (cm) và $32-2x$ (cm). Khi đó diện tích mặt cắt ngang là $(32-2x)x$ (cm^2).

Ta thấy: Diện tích mặt cắt ngang của rãnh dẫn nước lớn hơn 120 cm^2 khi và chỉ khi

$$(32-2x)x \geq 120 \Leftrightarrow -x^2+16x-60 \geq 0.$$

Tam thức $f(x)=-x^2+16x-60$ có hai nghiệm $x_1=6$, $x_2=10$ và hệ số $a=-1<0$. Sử dụng định lí về dấu của tam thức bậc hai, ta thấy tập hợp những giá trị của x sao cho tam thức $f(x)$ mang dấu "+" là khoảng $(6;10)$. Do đó tập nghiệm của bất phương trình $-x^2+16x-60 \geq 0$ là đoạn $[6;10]$.

Vậy rãnh dẫn nước phải có độ cao ít nhất là 6 cm.

Ví dụ 5 Tìm giao các tập nghiệm của hai bất phương trình sau:

$x^2+2x-8<0$ (3) và $x^2-9<0$ (4)

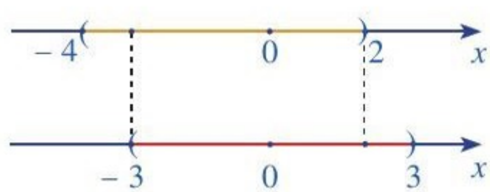
Giải

Ta có: (3) $\Leftrightarrow -4<x<2$. Tập nghiệm của bất phương trình (3) là $S_3=(-4;2)$;

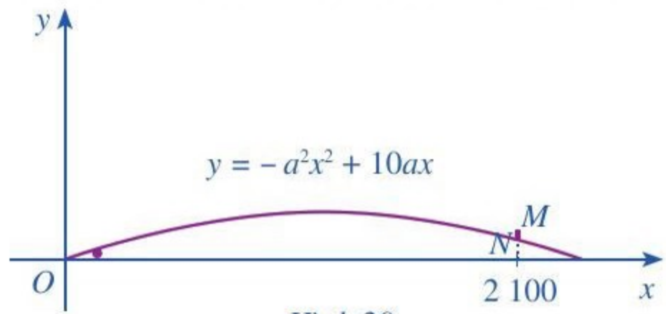
(4) $\Leftrightarrow -3<x<3$. Tập nghiệm của bất phương trình (4) là $S_4=(-3;3)$.

Giao các tập nghiệm của hai bất phương trình trên là:

$$S=S_3\cap S_4=(-4;2)\cap(-3;3)=(-3;2).$$



Ví dụ 6 Một tình huống trong huấn luyện pháo binh được mô tả như sau: Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, khẩu đại bác được biểu thị bằng điểm $O(0 ; 0)$ và bia mục tiêu được biểu thị bằng đoạn thẳng MN với $M(2\,100 ; 25)$ và $N(2\,100 ; 15)$ (*Hình 29*). Xạ thủ cần xác định parabol $y = -a^2x^2 + 10ax$ ($a > 0$) mô tả quỹ đạo chuyển động của viên đạn sao cho viên đạn bắn ra từ khẩu đại bác phải chạm vào bia mục tiêu. Tìm giá trị lớn nhất của a để xạ thủ đạt được mục đích trên.



Hình 29

Giải

Tại vị trí $x = 2\,100$, độ cao của viên đạn là:

$y = -a^2 . 2\,100^2 + 10a . 2\,100 = -4\,410\,000a^2 + 21\,000a$.

Viên đạn chạm được vào bia mục tiêu khi và chỉ khi a thoả mãn các bất phương trình sau:

$2\,100 \le \dfrac{10}{a}$ (5); $-4\,410\,000a^2 + 21\,000a \le 25$ (6); $-4\,410\,000a^2 + 21\,000a \ge 15$ (7).

• (5) $\Leftrightarrow \dfrac{1}{a} \ge 210 \Leftrightarrow 0 < a \le \dfrac{1}{210}$. Tức là $a \in \left(0 ; \dfrac{1}{210}\right]$.

• (6) $\Leftrightarrow 4\,410\,000a^2 - 21\,000a + 25 \ge 0$

$\Leftrightarrow (2\,100a - 5)^2 \ge 0$. Bất phương trình này đúng $\forall a > 0$.

• (7) $\Leftrightarrow 4\,410\,000a^2 - 21\,000a + 15 \le 0 \Leftrightarrow \dfrac{1}{420} - \dfrac{\sqrt{10}}{2\,100} \le a \le \dfrac{1}{420} + \dfrac{\sqrt{10}}{2\,100}$

$\Leftrightarrow a \in \left[\dfrac{1}{420} - \dfrac{\sqrt{10}}{2\,100} ; \dfrac{1}{420} + \dfrac{\sqrt{10}}{2\,100}\right]$.

Do $\dfrac{1}{420} - \dfrac{\sqrt{10}}{2\,100} > 0$ và $\dfrac{1}{420} + \dfrac{\sqrt{10}}{2\,100} < \dfrac{1}{210}$ nên

$$\left(0 ; \frac{1}{210}\right] \cap \left[\frac{1}{420} - \frac{\sqrt{10}}{2\,100} ; \frac{1}{420} + \frac{\sqrt{10}}{2\,100}\right] = \left[\frac{1}{420} - \frac{\sqrt{10}}{2\,100} ; \frac{1}{420} + \frac{\sqrt{10}}{2\,100}\right].$$

Vì thế, viên đạn chạm được vào bia mục tiêu khi và chỉ khi

$$a \in \left[\frac{1}{420} - \frac{\sqrt{10}}{2\,100} ; \frac{1}{420} + \frac{\sqrt{10}}{2\,100}\right].$$

Vậy giá trị lớn nhất của a là $\dfrac{1}{420} + \dfrac{\sqrt{10}}{2\,100}$.

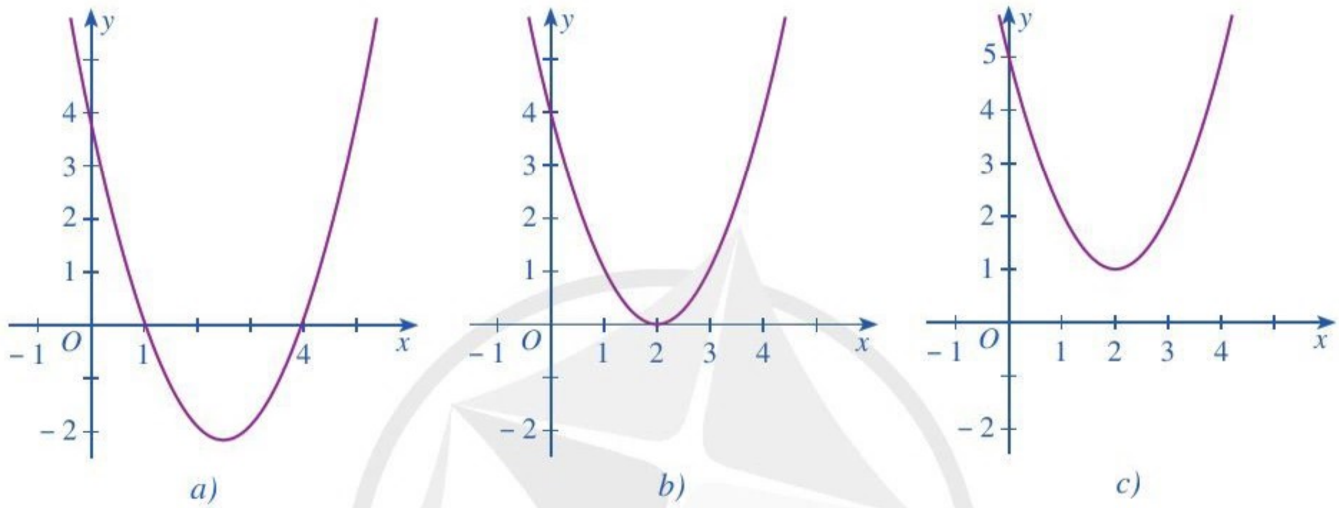
4 Tổng chi phí T (đơn vị tính: nghìn đồng) để sản xuất Q sản phẩm được cho bởi biểu thức $T = Q^2 + 30Q + 3\,300$; giá bán của 1 sản phẩm là 170 nghìn đồng. Số sản phẩm được sản xuất trong khoảng nào để đảm bảo không bị lỗ (giả thiết các sản phẩm được bán hết)?

BÀI TẬP

1. Trong các bất phương trình sau, bất phương trình nào là bất phương trình bậc hai một ẩn? Vì sao?

a) $-2x+2<0$; b) $\frac{1}{2}y^2-\sqrt{2}(y+1)\leq 0$; c) $y^2+x^2-2x\geq 0$.

2. Dựa vào đồ thị hàm số bậc hai $y=f(x)$ trong mỗi *Hình 30a, 30b, 30c*, hãy viết tập nghiệm của mỗi bất phương trình sau: $f(x)>0$; $f(x)<0$; $f(x)\geq 0$; $f(x)\leq 0$.



Hình 30

3. Giải các bất phương trình bậc hai sau:

a) $2x^2-5x+3>0$; b) $-x^2-2x+8\leq 0$;

c) $4x^2-12x+9<0$; d) $-3x^2+7x-4\geq 0$.

4. Tìm m để phương trình $2x^2+(m+1)x+m-8=0$ có nghiệm.

5. Xét hệ toạ độ Oth trên mặt phẳng, trong đó trục Ot biểu thị thời gian t (tính bằng giây) và trục Oh biểu thị độ cao h (tính bằng mét). Một quả bóng được đá lên từ điểm $A(0\ ;\ 0{,}2)$ và chuyển động theo quỹ đạo là một cung parabol. Quả bóng đạt độ cao 8,5 m sau 1 giây và đạt độ cao 6 m sau 2 giây.

a) Hãy tìm hàm số bậc hai biểu thị quỹ đạo chuyển động của quả bóng.

b) Trong khoảng thời gian nào thì quả bóng vẫn chưa chạm đất?

6. Công ty An Bình thông báo giá tiền cho chuyến đi tham quan của một nhóm khách du lịch như sau:

10 khách đầu tiên có giá là 800 000 đồng/người. Nếu có nhiều hơn 10 người đăng kí thì cứ có thêm 1 người, giá vé sẽ giảm 10 000 đồng/người cho toàn bộ hành khách.

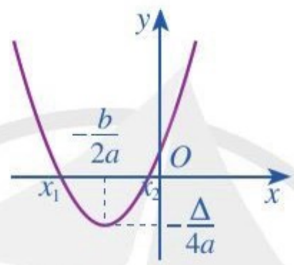
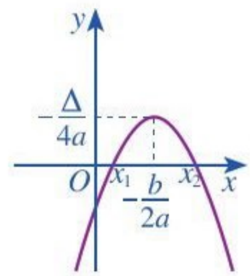
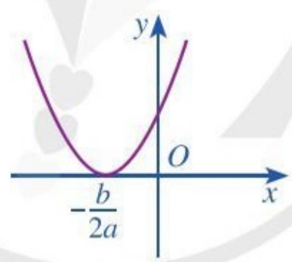
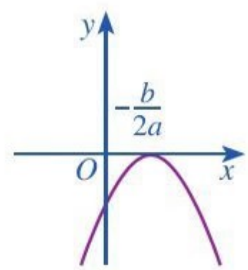
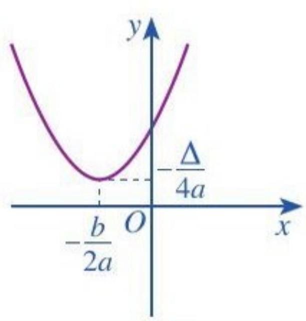
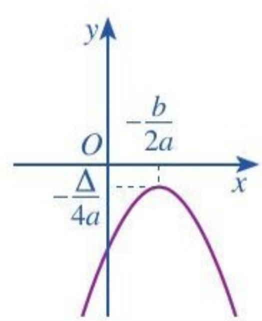
a) Gọi x là số lượng khách từ người thứ 11 trở lên của nhóm. Biểu thị doanh thu theo x.

b) Số người của nhóm khách du lịch nhiều nhất là bao nhiêu thì công ty không bị lỗ? Biết rằng chi phí thực sự cho chuyến đi là 700 000 đồng/người.

TÌM HIỂU THÊM

Bảng dưới đây tổng kết các trường hợp có thể xảy ra khi giải bất phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c > 0$ (*) $(a \neq 0)$.

Đặt $f(x) = ax^2 + bx + c$.

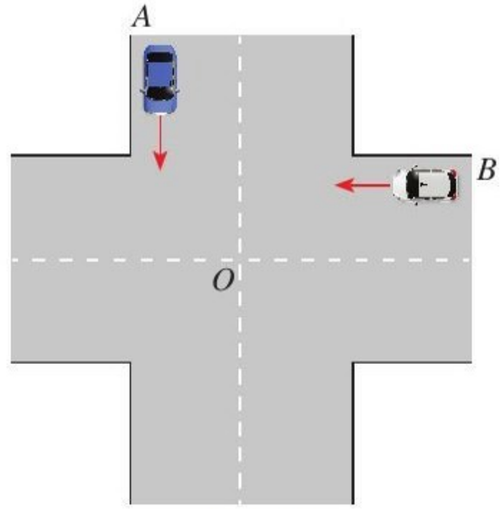
Dấu của a / **Dấu của Δ**	$a > 0$	$a < 0$
$\Delta > 0$ $f(x)$ có hai nghiệm x_1, x_2 $(x_1 < x_2)$	(*) $\Leftrightarrow x \in (-\infty; x_1) \cup (x_2; +\infty)$ 	(*) $\Leftrightarrow x \in (x_1; x_2)$ 
$\Delta = 0$ $f(x)$ có nghiệm kép $x = -\dfrac{b}{2a}$	(*) $\Leftrightarrow x \in \mathbb{R} \setminus \left\{-\dfrac{b}{2a}\right\}$ 	(*) vô nghiệm 
$\Delta < 0$ $f(x)$ vô nghiệm	(*) $\Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$ 	(*) vô nghiệm 

Tương tự, em hãy lập bảng tổng kết các trường hợp có thể xảy ra khi giải các bất phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c < 0$; $ax^2 + bx + c \geq 0$; $ax^2 + bx + c \leq 0$ $(a \neq 0)$.

§5 HAI DẠNG PHƯƠNG TRÌNH QUY VỀ PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI

Hai ô tô xuất phát tại cùng một thời điểm với vận tốc trung bình như nhau là 40 km/h từ hai vị trí A và B trên hai con đường vuông góc với nhau để đi về bến O là giao của hai con đường. Vị trí A cách bến 8 km, vị trí B cách bến 7 km. Gọi x (giờ) là thời gian hai xe bắt đầu chạy cho tới khi cách nhau 5 km (*Hình 31*).

Bạn Dương xác định được x thoả mãn phương trình $\sqrt{(8-40x)^2+(7-40x)^2}=5$.



Hình 31

Làm thế nào để tìm được giá trị của x?

I. GIẢI PHƯƠNG TRÌNH CÓ DẠNG $\sqrt{f(x)}=\sqrt{g(x)}$ (I)

($f(x)=ax^2+bx+c$ và $g(x)=mx^2+nx+p$ với $a\neq m$, a hoặc m có thể bằng 0)

Để giải phương trình (I), ta làm như sau:

Bước 1. Bình phương hai vế của (I) dẫn đến phương trình $f(x)=g(x)$ rồi tìm nghiệm của phương trình này.

Bước 2. Thay từng nghiệm của phương trình $f(x)=g(x)$ vào bất phương trình $f(x)\geq 0$ (hoặc $g(x)\geq 0$). Nghiệm nào thoả mãn bất phương trình đó thì giữ lại, nghiệm nào không thoả mãn thì loại đi.

Bước 3. Trên cơ sở những nghiệm giữ lại ở *Bước 2*, ta kết luận nghiệm của phương trình (I).

Chú ý:

- Trong hai bất phương trình $f(x)\geq 0$ và $g(x)\geq 0$, ta thường chọn bất phương trình có dạng đơn giản hơn để thực hiện *Bước 2*.
- Người ta chứng minh được rằng tập hợp (số thực) giữ lại ở *Bước 2* chính là tập nghiệm của phương trình (I).

Ví dụ 1 Giải phương trình $\sqrt{x^2-6x-4}=\sqrt{x-4}$ (1).

Giải

Bình phương hai vế của (1) ta được $x^2-6x-4=x-4$ (2).

Ta có: (2) $\Leftrightarrow x^2-7x=0$.

Do đó, phương trình (2) có hai nghiệm là $x = 0$ và $x = 7$.

Thay lần lượt hai giá trị trên vào bất phương trình $x - 4 \geq 0$, ta thấy chỉ có $x = 7$ thoả mãn bất phương trình.

Vậy nghiệm của phương trình (1) là $x = 7$.

Ví dụ 2 Giải phương trình $\sqrt{2x^2 + 3x + 1} = \sqrt{x^2 + 4x + 3}$ (3).

Giải

Bình phương hai vế của (3) ta được $2x^2 + 3x + 1 = x^2 + 4x + 3$ (4).

Ta có: (4) $\Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0$.

Do đó, phương trình (4) có hai nghiệm là $x = -1$ và $x = 2$.

Thay lần lượt hai giá trị trên vào bất phương trình $x^2 + 4x + 3 \geq 0$, ta thấy cả hai giá trị đều thoả mãn bất phương trình.

Vậy phương trình (3) có hai nghiệm là $x = -1$ và $x = 2$.

1 Giải phương trình:

$\sqrt{3x^2 - 4x + 1} = \sqrt{x^2 + x - 1}$.

II. GIẢI PHƯƠNG TRÌNH CÓ DẠNG $\sqrt{f(x)} = g(x)$ (II)

($f(x) = ax^2 + bx + c$ và $g(x) = dx + e$ với $a \neq d^2$)

Để giải phương trình (II), ta làm như sau:

Bước 1. Giải bất phương trình $g(x) \geq 0$ để tìm tập nghiệm của bất phương trình đó.

Bước 2. Bình phương hai vế của (II) dẫn đến phương trình $f(x) = [g(x)]^2$ rồi tìm tập nghiệm của phương trình đó.

Bước 3. Trong những nghiệm của phương trình $f(x) = [g(x)]^2$, ta chỉ giữ lại những nghiệm thuộc tập nghiệm của bất phương trình $g(x) \geq 0$. Tập nghiệm giữ lại đó chính là tập nghiệm của phương trình (II).

Ví dụ 3 Giải phương trình

$$\sqrt{x^2 - 6x + 6} = 2x - 1 \ (5).$$

Giải

Trước hết ta giải bất phương trình $2x - 1 \geq 0$ (6).

Ta có: (6) $\Leftrightarrow 2x \geq 1 \Leftrightarrow x \geq \dfrac{1}{2}$.

Bình phương hai vế của (5) ta được $x^2 - 6x + 6 = (2x - 1)^2$ (7).

Ta có: (7) $\Leftrightarrow x^2 - 6x + 6 = 4x^2 - 4x + 1 \Leftrightarrow 3x^2 + 2x - 5 = 0$.

Do đó, phương trình (7) có hai nghiệm là $x = 1$ và $x = \frac{-5}{3}$.

Trong hai giá trị trên, chỉ có giá trị $x = 1$ là thoả mãn $x \geq \frac{1}{2}$.

Vậy phương trình (5) có nghiệm là $x = 1$.

2 Giải phương trình:
$\sqrt{3x - 5} = x - 1$.

Ví dụ 4 Trong bài toán ở phần mở đầu, hãy giải thích vì sao thời gian x (giờ) để hai xe bắt đầu chạy cho tới khi cách nhau 5 km thoả mãn phương trình $\sqrt{(8-40x)^2 + (7-40x)^2} = 5$. Sau đó, hãy giải phương trình trên.

Giải. (*Hình 32*)

Quãng đường xe ô tô xuất phát từ A, B đi được sau x giờ (với $x > 0$) là $40x$ (km).

Sau x giờ, ô tô xuất phát từ vị trí A đến C cách O một khoảng $OC = 8 - 40x$ (km).

Sau x giờ, ô tô xuất phát từ vị trí B đến D cách O một khoảng $OD = 7 - 40x$ (km).

Để $8 - 40x \geq 0$ và $7 - 40x \geq 0$ thì $0 \leq x \leq 0{,}175$. Do tam giác OCD là tam giác vuông nên

$$CD = \sqrt{OC^2 + OD^2} = \sqrt{(8-40x)^2 + (7-40x)^2}.$$

Ta có phương trình: $\sqrt{(8-40x)^2 + (7-40x)^2} = 5$.

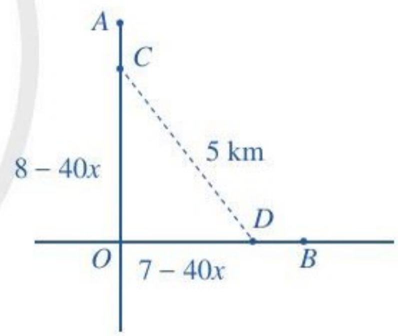
Bình phương hai vế ta có:

$$(8-40x)^2 + (7-40x)^2 = 25.$$

$$\Leftrightarrow 1\,600x^2 - 640x + 64 + 1\,600x^2 - 560x + 49 = 25$$

$$\Leftrightarrow 3\,200x^2 - 1\,200x + 88 = 0$$

$$\Leftrightarrow 400x^2 - 150x + 11 = 0.$$



Hình 32

Phương trình có hai nghiệm là $x = 0{,}1$ hoặc $x = 0{,}275$. Đối chiếu với điều kiện $0 \leq x \leq 0{,}175$, ta chọn $x = 0{,}1$.

Vậy thời gian để hai xe cách nhau 5 km là 0,1 giờ.

BÀI TẬP

1. Giải các phương trình sau:

a) $\sqrt{2x^2 - 3x - 1} = \sqrt{2x + 3}$;

b) $\sqrt{4x^2 - 6x - 6} = \sqrt{x^2 - 6}$;

c) $\sqrt{x + 9} = 2x - 3$;

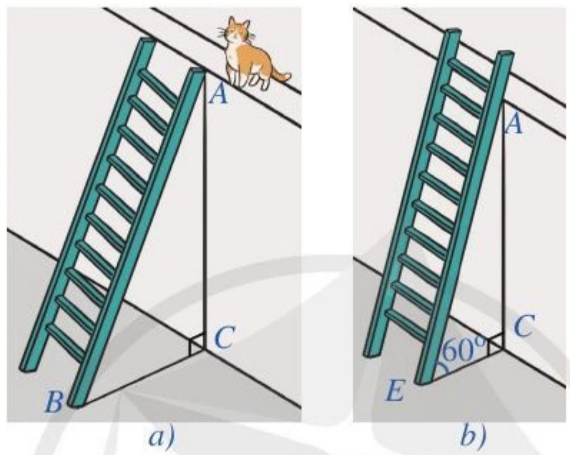
d) $\sqrt{-x^2 + 4x - 2} = 2 - x$.

2. Giải các phương trình sau:

a) $\sqrt{2-x}+2x=3$;

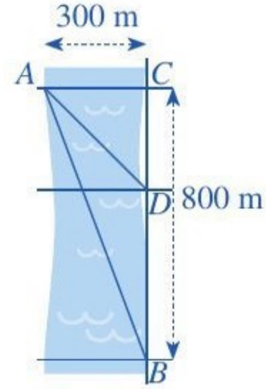
b) $\sqrt{-x^2+7x-6}+x=4$.

3. Để leo lên một bức tường, bác Nam dùng một chiếc thang có chiều dài cao hơn bức tường đó 1 m. Ban đầu, bác Nam đặt chiếc thang mà đầu trên của chiếc thang đó vừa chạm đúng vào mép trên bức tường (*Hình 33a*). Sau đó, bác Nam dịch chuyển chân thang vào gần chân tường thêm 0,5 m thì bác Nam nhận thấy thang tạo với mặt đất một góc 60° (*Hình 33b*). Hỏi bức tường cao bao nhiêu mét (làm tròn kết quả đến hàng phần mười)?



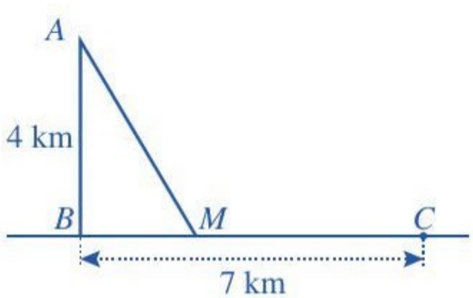
Hình 33

4. Một người đứng ở điểm A trên một bờ sông rộng 300 m, chèo thuyền đến vị trí D, sau đó chạy bộ đến vị trí B cách C một khoảng 800 m (*Hình 34*). Vận tốc chèo thuyền là 6 km/h, vận tốc chạy bộ là 10 km/h và giả sử vận tốc dòng nước không đáng kể. Tính khoảng cách từ vị trí C đến D, biết tổng thời gian người đó chèo thuyền và chạy bộ từ A đến B (qua D) là 7,2 phút.

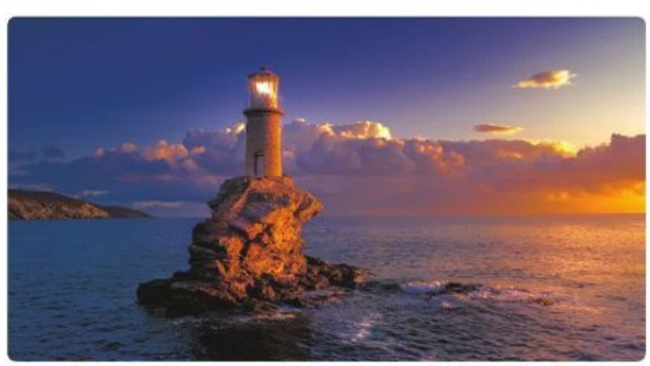


Hình 34

5. Một ngọn hải đăng đặt tại vị trí A cách bờ biển một khoảng cách $AB = 4$ km. Trên bờ biển có một cái kho ở vị trí C cách B một khoảng là 7 km. Người canh hải đăng có thể chèo thuyền từ A đến vị trí M trên bờ biển với vận tốc 3 km/h rồi đi bộ đến C với vận tốc 5 km/h (*Hình 35*). Tính khoảng cách từ vị trí B đến M, biết thời gian người đó đi từ A đến C (qua M) là 148 phút.



Hình 35



(*Nguồn: https://shutterstock.com*)

BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG III

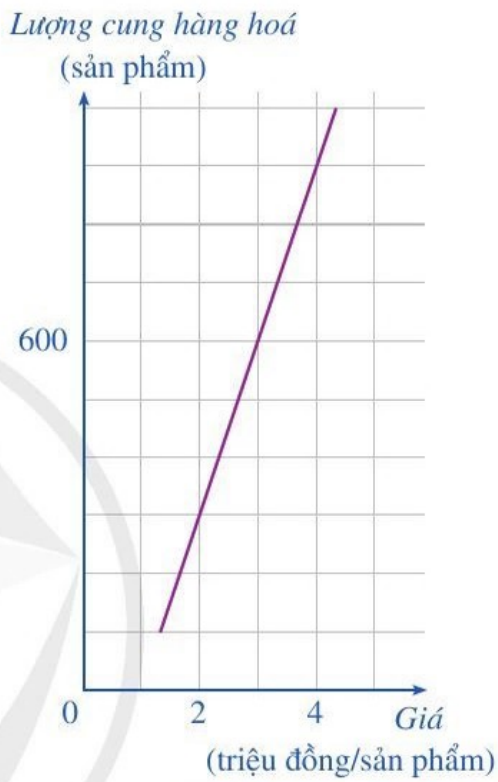
1. Tìm tập xác định của mỗi hàm số sau:

a) $y = \dfrac{1}{x^2 - x}$; b) $y = \sqrt{x^2 - 4x + 3}$; c) $y = \dfrac{1}{\sqrt{x - 1}}$.

2. Đồ thị ở *Hình 36* cho thấy sự phụ thuộc của lượng hàng hoá được sản xuất (cung) (đơn vị: sản phẩm) bởi giá bán (đơn vị: triệu đồng/sản phẩm) đối với một loại hàng hoá.

a) Xác định lượng hàng hoá được sản xuất khi mức giá bán 1 sản phẩm là 2 triệu đồng; 4 triệu đồng.

b) Biết nhu cầu thị trường đang cần là 600 sản phẩm. Hỏi với mức giá bán là bao nhiêu thì thị trường cân bằng (thị trường cân bằng khi sản lượng cung bằng sản lượng cầu)?



Hình 36

3. Một nhà cung cấp dịch vụ Internet đưa ra hai gói khuyến mại cho người dùng như sau:

Gói *A*: Giá cước 190 000 đồng/tháng.

Nếu trả tiền cước ngay 6 tháng thì sẽ được tặng thêm 1 tháng.

Nếu trả tiền cước ngay 12 tháng thì sẽ được tặng thêm 2 tháng.

Gói *B*: Giá cước 189 000 đồng/tháng.

Nếu trả tiền cước ngay 7 tháng thì số tiền phải trả cho 7 tháng đó là 1 134 000 đồng.

Nếu trả tiền cước ngay 15 tháng thì số tiền phải trả cho 15 tháng đó là 2 268 000 đồng.

Giả sử số tháng sử dụng Internet là x (x nguyên dương).

a) Hãy lập các hàm số thể hiện số tiền phải trả ít nhất theo mỗi gói *A*, *B* nếu thời gian dùng không quá 15 tháng.

b) Nếu gia đình bạn Minh dùng 15 tháng thì nên chọn gói nào?

4. Quan sát đồ thị hàm số bậc hai $y = ax^2 + bx + c$ ở mỗi *Hình 37a, 37b* rồi nêu:

a) Dấu của hệ số a;

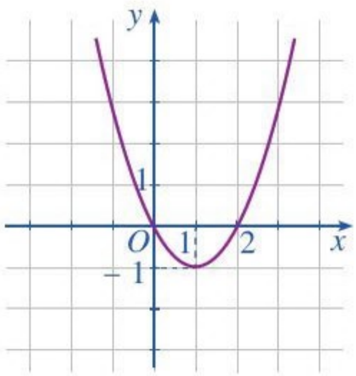
b) Toạ độ đỉnh và trục đối xứng;

c) Khoảng đồng biến;

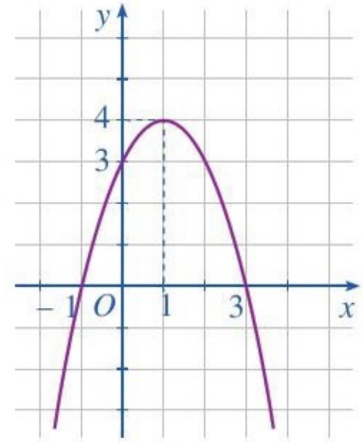
d) Khoảng nghịch biến;

e) Khoảng giá trị x mà $y > 0$;

g) Khoảng giá trị x mà $y \le 0$.



a)



b)

Hình 37

5. Vẽ đồ thị của mỗi hàm số sau:

a) $y = x^2 - 3x - 4$; b) $y = x^2 + 2x + 1$; c) $y = -x^2 + 2x - 2$.

6. Lập bảng xét dấu của mỗi tam thức bậc hai sau:

a) $f(x) = -3x^2 + 4x - 1$; b) $f(x) = x^2 - x - 12$; c) $f(x) = 16x^2 + 24x + 9$.

7. Giải các bất phương trình sau:

a) $2x^2 + 3x + 1 \geq 0$; b) $-3x^2 + x + 1 > 0$;

c) $4x^2 + 4x + 1 \geq 0$; d) $-16x^2 + 8x - 1 < 0$;

e) $2x^2 + x + 3 < 0$; g) $-3x^2 + 4x - 5 < 0$.

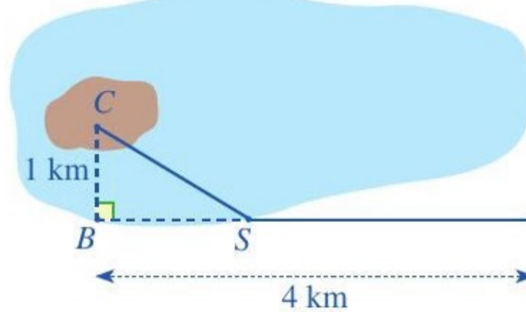
8. Giải các phương trình sau:

a) $\sqrt{x + 2} = x$;

b) $\sqrt{2x^2 + 3x - 2} = \sqrt{x^2 + x + 6}$;

c) $\sqrt{2x^2 + 3x - 1} = x + 3$.

9. Một kĩ sư thiết kế đường dây điện từ vị trí A đến vị trí S và từ vị trí S đến vị trí C trên cù lao như *Hình 38*. Tiền công thiết kế mỗi ki-lô-mét đường dây từ A đến S và từ S đến C lần lượt là 3 triệu đồng và 5 triệu đồng. Biết tổng số tiền công là 16 triệu đồng. Tính tổng số ki-lô-mét đường dây điện đã thiết kế.



Hình 38

CHƯƠNG IV
HỆ THỨC LƯỢNG TRONG TAM GIÁC. VECTƠ

Trong chương này, chúng ta tìm hiểu những nội dung sau: giá trị lượng giác của một góc từ 0° đến 180°, định lí côsin và định lí sin trong tam giác, giải tam giác; vectơ, tổng và hiệu hai vectơ, tích của một số với một vectơ, tích vô hướng của hai vectơ; ứng dụng vào giải các bài toán thực tiễn.

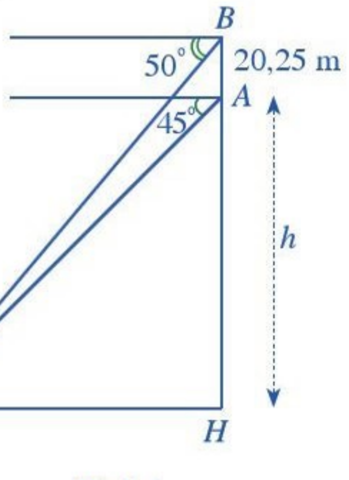
§1 GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC CỦA MỘT GÓC TỪ 0° ĐẾN 180°. ĐỊNH LÍ CÔSIN VÀ ĐỊNH LÍ SIN TRONG TAM GIÁC

Cột cờ Lũng Cú là cột cờ Quốc gia, nằm ở đỉnh Lũng Cú hay còn gọi là đỉnh núi Rồng (Long Sơn) thuộc xã Lũng Cú, huyện Đồng Văn, tỉnh Hà Giang, cách cực Bắc Việt Nam khoảng 3,3 km. Thời nhà Lý, cột cờ Lũng Cú chỉ được làm bằng cây sa mộc. Ngày nay, cột cờ có độ cao 33,15 m bao gồm bệ cột cao 20,25 m và cán cờ cao 12,9 m. Chân bệ cột cờ có 8 mặt phù điêu bằng đá xanh mô phỏng hoa văn mặt của trống đồng Đông Sơn và những hoạ tiết minh hoạ các giai đoạn qua từng thời kì lịch sử của đất nước, cũng như con người, tập quán của các dân tộc ở Hà Giang. Trên đỉnh cột là Quốc kì Việt Nam có diện tích 54 m^2, biểu tượng cho 54 dân tộc của đất nước ta.

(*Nguồn: http://baophutho.vn*)

Cột cờ Lũng Cú (Hà Giang)
(*Nguồn: https://shutterstock.com*)

Từ chân bệ cột cờ và đỉnh bệ cột cờ bạn Nam đo được góc nâng (so với phương nằm ngang) tới một vị trí dưới chân núi lần lượt là 45° và 50° (*Hình 1*).



Hình 1

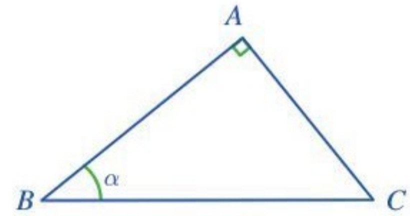
Chiều cao h của đỉnh Lũng Cú so với chân núi là bao nhiêu mét?

I. GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC CỦA MỘT GÓC TỪ 0° ĐẾN 180°

1 Cho tam giác ABC vuông tại A có $\widehat{ABC} = \alpha$ (*Hình 2*).

a) Nhắc lại định nghĩa $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\tan\alpha$, $\cot\alpha$.

b) Biểu diễn tỉ số lượng giác của góc $90^{\circ} - \alpha$ theo tỉ số lượng giác của góc α.



Hình 2

$\sin\alpha = \dfrac{AC}{BC}$, $\cos\alpha = \dfrac{AB}{BC}$, $\tan\alpha = \dfrac{AC}{AB}$, $\cot\alpha = \dfrac{AB}{AC}$.

$\sin(90^{\circ} - \alpha) = \cos\alpha$, $\cos(90^{\circ} - \alpha) = \sin\alpha$,

$\tan(90^{\circ} - \alpha) = \cot\alpha$, $\cot(90^{\circ} - \alpha) = \tan\alpha$.

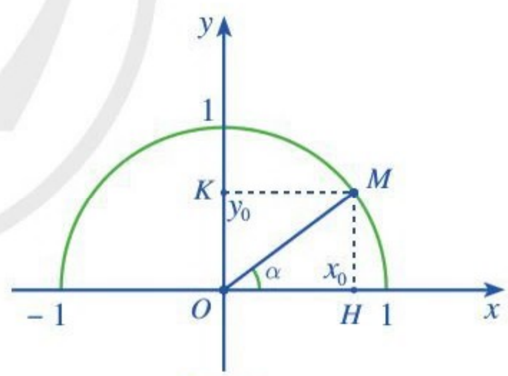
2 Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, nửa đường tròn tâm O nằm phía trên trục hoành bán kính $R = 1$ được gọi là *nửa đường tròn đơn vị* (*Hình 3*). Với mỗi góc nhọn α ta có thể xác định một điểm M duy nhất trên nửa đường tròn đơn vị sao cho $\widehat{xOM} = \alpha$. Giả sử điểm M có toạ độ $(x_0; y_0)$. Hãy tính $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\tan\alpha$, $\cot\alpha$ theo x_0, y_0.

Để tính $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\tan\alpha$, $\cot\alpha$ theo x_0, y_0, ta làm như sau:

Xét tam giác vuông OMH, ta có:

$$\sin\alpha = \frac{MH}{OM} = \frac{y_0}{1} = y_0,\ \cos\alpha = \frac{OH}{OM} = \frac{x_0}{1} = x_0,$$

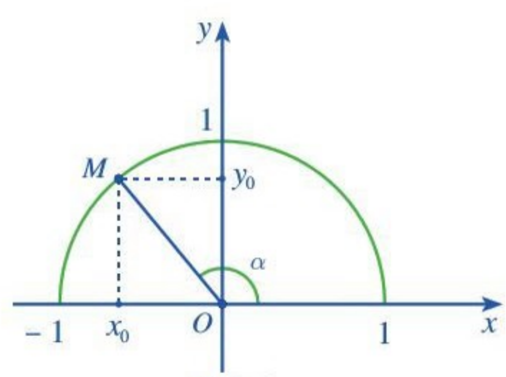
$$\tan\alpha = \frac{MH}{OH} = \frac{y_0}{x_0},\ \cot\alpha = \frac{OH}{MH} = \frac{x_0}{y_0}.$$



Hình 3

Mở rộng khái niệm tỉ số lượng giác đối với góc nhọn cho những góc α từ 0° đến 180°, ta có định nghĩa sau đây:

Với mỗi góc α $(0^{\circ} \leq \alpha \leq 180^{\circ})$, ta xác định một điểm M $(x_0; y_0)$ trên nửa đường tròn đơn vị sao cho $\widehat{xOM} = \alpha$ (*Hình 4*). Khi đó:



Hình 4

- sin của góc α, kí hiệu là $\sin\alpha$, được xác định bởi: $\sin\alpha = y_0$;
- côsin của góc α, kí hiệu là $\cos\alpha$, được xác định bởi: $\cos\alpha = x_0$;
- tang của góc α, kí hiệu là $\tan\alpha$, được xác định bởi: $\tan\alpha = \dfrac{y_0}{x_0}$ $(x_0 \neq 0)$;
- côtang của góc α, kí hiệu là $\cot\alpha$, được xác định bởi: $\cot\alpha = \dfrac{x_0}{y_0}$ $(y_0 \neq 0)$.

Các số $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\tan\alpha$, $\cot\alpha$ được gọi là các *giá trị lượng giác* của góc α.

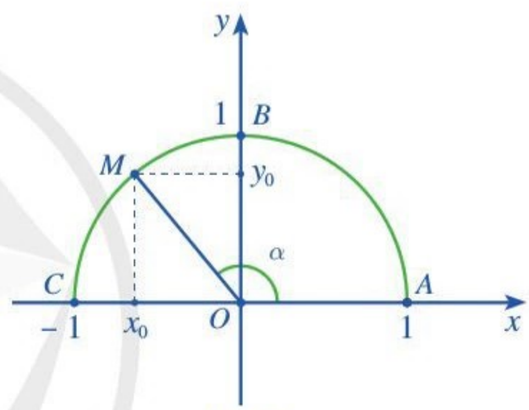
Ví dụ 1 Tính các giá trị lượng giác của các góc: 0^o, 90^o, 180^o.

Giải. (*Hình 5*)

Với $\alpha = 0^o$: Khi đó, M trùng với $A(1; 0)$. Do đó $\sin 0^o = 0$, $\cos 0^o = 1$, $\tan 0^o = 0$, $\cot 0^o$ không xác định.

Với $\alpha = 90^o$: Khi đó, M trùng với $B(0; 1)$. Do đó $\sin 90^o = 1$, $\cos 90^o = 0$, $\tan 90^o$ không xác định, $\cot 90^o = 0$.

Với $\alpha = 180^o$: Khi đó, M trùng với $C(-1; 0)$. Do đó $\sin 180^o = 0$, $\cos 180^o = -1$, $\tan 180^o = 0$, $\cot 180^o$ không xác định.



Hình 5

Chú ý

- $\tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ $(\alpha \neq 90^o)$;

  $\cot\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$ $(0 < \alpha < 180^o)$.

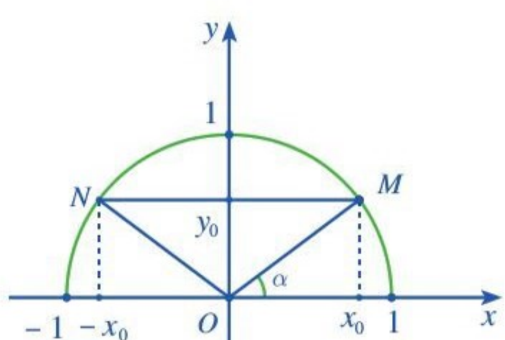
- $\sin(90^o - \alpha) = \cos\alpha$ $(0^o \le \alpha \le 90^o)$;

  $\cos(90^o - \alpha) = \sin\alpha$ $(0^o \le \alpha \le 90^o)$;

  $\tan(90^o - \alpha) = \cot\alpha$ $(0^o < \alpha \le 90^o)$;

  $\cot(90^o - \alpha) = \tan\alpha$ $(0^o \le \alpha < 90^o)$.

3 Trên nửa đường tròn đơn vị ta có dây cung MN song song với trục Ox và $\widehat{xOM} = \alpha$ (*Hình 6*).



Hình 6

a) Chứng minh $\widehat{xON} = 180^o - \alpha$.

b) Biểu diễn giá trị lượng giác của góc $180^o - \alpha$ theo giá trị lượng giác của góc α.

Với $0^o \le \alpha \le 180^o$ thì:

$$\sin(180^o - \alpha) = \sin\alpha;$$
$$\cos(180^o - \alpha) = -\cos\alpha;$$
$$\tan(180^o - \alpha) = -\tan\alpha \ (\alpha \ne 90^o);$$
$$\cot(180^o - \alpha) = -\cot\alpha \ (\alpha \ne 0^o, \alpha \ne 180^o).$$

Ví dụ 2 Không dùng máy tính cầm tay, tính giá trị của biểu thức sau:

$$T = \cos 15^o - \sin 35^o + \cos 55^o + \cos 165^o - \cos 180^o.$$

Giải

$$T = \cos 15^o - \sin 35^o + \cos(90^o - 35^o) + \cos(180^o - 15^o) + 1$$
$$= \cos 15^o - \sin 35^o + \sin 35^o - \cos 15^o + 1 = 1.$$

Ví dụ 3 Viết giá trị lượng giác của góc 120^o.

Giải

Ta có: $\sin 120^o = \sin 60^o = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$; $\cos 120^o = -\cos 60^o = -\dfrac{1}{2}$;

$\tan 120^o = -\tan 60^o = -\sqrt{3}$; $\cot 120^o = -\cot 60^o = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

Tương tự ta có bảng giá trị lượng giác (GTLG) của một số góc đặc biệt:

GTLG \ α	0^o	30^o	45^o	60^o	90^o	120^o	135^o	150^o	180^o
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
$\tan\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	‖	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0
$\cot\alpha$	‖	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	‖

Trong bảng, kí hiệu "‖" để chỉ giá trị lượng giác không xác định.

4 Ta có thể tìm giá trị lượng giác (đúng hoặc gần đúng) của một góc (từ 0^o đến 180^o) bằng cách sử dụng các phím: $\boxed{\sin}$, $\boxed{\cos}$, $\boxed{\tan}$ trên máy tính cầm tay.

Tính $\sin 75^o$, $\cos 175^o$, $\tan 64^o$ (làm tròn đến hàng phần chục nghìn).

Để tính các giá trị lượng giác trên, sau khi đưa máy tính về chế độ "độ" ta làm như sau:

	Nút ấn	**Kết quả**
$\sin 75^o$	$\boxed{\sin}\ \boxed{7}\ \boxed{5}\ \boxed{=}$	0.9659
$\cos 175^o$	$\boxed{\cos}\ \boxed{1}\ \boxed{7}\ \boxed{5}\ \boxed{=}$	– 0.9962
$\tan 64^o$	$\boxed{\tan}\ \boxed{6}\ \boxed{4}\ \boxed{=}$	2.0503

5 Ta có thể tìm số đo (đúng hoặc gần đúng) của một góc từ 0^o đến 180^o khi biết giá trị lượng giác của góc đó bằng cách sử dụng các phím: $\boxed{\text{SHIFT}}$ cùng với $\boxed{\sin}$; $\boxed{\cos}$; $\boxed{\tan}$ trên máy tính cầm tay.

Tìm số đo góc α (từ 0^o đến 180^o) và làm tròn đến độ, biết:

a) $\cos\alpha = -0,97$; b) $\tan\alpha = 0,68$; c) $\sin\alpha = 0,45$.

Để tính gần đúng số đo góc α trong mỗi trường hợp trên, sau khi đưa máy tính về chế độ "độ", ta làm như sau:

	Nút ấn	**Kết quả**
$\cos\alpha = -0,97$	$\boxed{\text{SHIFT}}\ \boxed{\cos}\ \boxed{-}\ \boxed{0}\ \boxed{.}\ \boxed{9}\ \boxed{7}\ \boxed{=}$	166^o
$\tan\alpha = 0,68$	$\boxed{\text{SHIFT}}\ \boxed{\tan}\ \boxed{0}\ \boxed{.}\ \boxed{6}\ \boxed{8}\ \boxed{=}$	34^o
$\sin\alpha = 0,45$	$\boxed{\text{SHIFT}}\ \boxed{\sin}\ \boxed{0}\ \boxed{.}\ \boxed{4}\ \boxed{5}\ \boxed{=}$	27^o

Chú ý: Khi tìm góc α ($0^o \le \alpha \le 180^o$) nếu đã biết $\sin\alpha$, trên máy tính chỉ hiện lên kết quả góc α trong khoảng từ 0^o đến 90^o. Giá trị còn lại cần tìm là $180^o - \alpha$.

Chẳng hạn trong hoạt động trên, giá trị còn lại cần tìm của α với $\sin\alpha = 0,45$ là khoảng $180^o - 27^o = 153^o$.

1 Hãy tính chiều cao h của đỉnh Lũng Cú so với chân núi trong bài toán ở phần mở đầu.

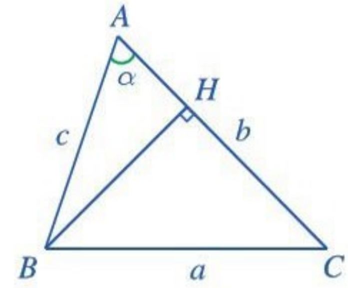
II. ĐỊNH LÍ CÔSIN

Cho tam giác ABC có $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$, $\widehat{BAC} = \alpha$. Kẻ đường cao BH. Thực hiện các hoạt động sau:

6 Cho α là góc nhọn, chứng minh:

a) $HC = |AC - AH|$ và $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AH \, . \, AC$;

b) $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos\alpha$.



Hình 7

Để chứng minh các đẳng thức trên, ta làm như sau:

a) Nếu góc C nhọn thì H nằm giữa A và C. Do đó

$HC = AC - AH = |AC - AH|$ (*Hình 7*).

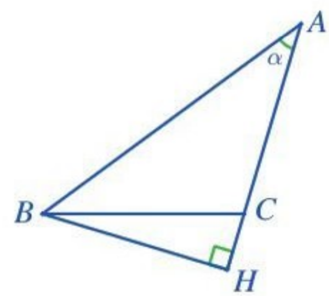
Nếu góc C tù thì C nằm giữa A và H. Do đó

$HC = AH - AC = |AC - AH|$ (*Hình 8*).

Nếu góc C vuông thì C trùng với H. Do đó

$HC = 0 = |AC - AH|$.

Trong mọi trường hợp, ta đều có $HC = |AC - AH|$.



Hình 8

Xét các tam giác vuông BHC và AHB, áp dụng định lí Pythagore, ta có:

$$BC^2 = BH^2 + HC^2 = BH^2 + (AC - AH)^2 = (BH^2 + AH^2) + AC^2 - 2AH \, . \, AC$$
$$= AB^2 + AC^2 - 2AH \, . \, AC.$$

b) Xét tam giác vuông AHB, ta có: $AH = AB \cos A = c \cos\alpha$.

Do đó $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AH \, . \, AC = b^2 + c^2 - 2bc \cos\alpha$.

Vậy $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos\alpha$.

7 Cho α là góc tù. Chứng minh:

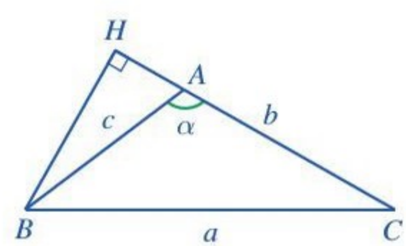
a) $HC = AC + AH$ và $BC^2 = AB^2 + AC^2 + 2AH \, . \, AC$;

b) $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos\alpha$.

Để chứng minh các đẳng thức trên, ta làm như sau:

a) (*Hình 9*). Xét các tam giác vuông BHC và AHB, áp dụng định lí Pythagore, ta có:

$$BC^2 = BH^2 + HC^2 = BH^2 + (AC + AH)^2$$
$$= (BH^2 + AH^2) + AC^2 + 2AH \, . \, AC$$
$$= AB^2 + AC^2 + 2AH \, . \, AC.$$



Hình 9

b) Xét tam giác vuông AHB, ta có:

$AH = AB\cos(180^{\circ} - \alpha) = -c\cos\alpha$.

Do đó $BC^2 = AB^2 + AC^2 + 2AH \cdot AC = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$.

Vậy $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$.

8 Cho α là góc vuông. Chứng minh $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$.

Như vậy, trong tam giác ABC tuỳ ý ta có: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$.

Bằng cách chứng minh tương tự, ta có định lí côsin sau đây:

Cho tam giác ABC có $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$. Khi đó:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A,$$

$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca\cos B,$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C.$$

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc},$$

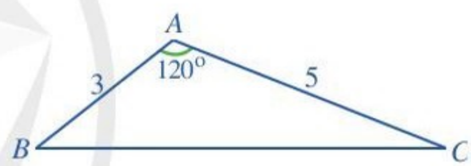
$$\cos B = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca},$$

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}.$$

Ví dụ 4 Cho tam giác ABC có $AB = 3$, $AC = 5$ và $\widehat{A} = 120^{\circ}$ (*Hình 10*).

a) Tính $\cos A$.

b) Tính độ dài cạnh BC.



Hình 10

Giải

a) Ta có: $\cos A = \cos 120^{\circ} = -\cos 60^{\circ} = -\dfrac{1}{2}$.

b) Áp dụng định lí côsin trong tam giác ABC ta có:

$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos A$.

Thay số ta có:

$BC^2 = 3^2 + 5^2 - 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \left(-\dfrac{1}{2}\right) = 49$.

Do đó $BC = \sqrt{49} = 7$.

2 Cho tam giác ABC có $AB = 5$, $AC = 6$, $BC = 7$. Tính $\cos A$.

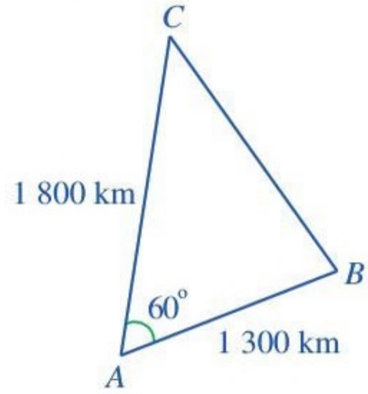
Ví dụ 5 Hai máy bay cùng xuất phát từ một sân bay A và bay theo hai hướng khác nhau, tạo với nhau góc 60°. Máy bay thứ nhất bay với vận tốc 650 km/h, máy bay thứ hai bay với vận tốc 900 km/h. Sau 2 giờ, hai máy bay cách nhau bao nhiêu ki-lô-mét (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm)? Biết rằng cả hai máy bay bay theo đường thẳng và sau 2 giờ bay đều chưa hạ cánh.

Giải

Giả sử sau 2 giờ, máy bay thứ nhất đến vị trí B, máy bay thứ hai đến vị trí C.

Ta có: $AB = 2 . 650 = 1\,300$ (km), $AC = 2 . 900 = 1\,800$ (km),

$\widehat{BAC} = 60^\circ$ (*Hình 11*).



Hình 11

Áp dụng định lí côsin trong tam giác ABC, ta có:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB . AC . \cos\widehat{BAC}$$

$$= 1\,300^2 + 1\,800^2 - 2 . 1\,300 . 1\,800 . \cos 60^\circ = 2\,590\,000.$$

Do đó $BC \approx 1\,609,35$ (km).

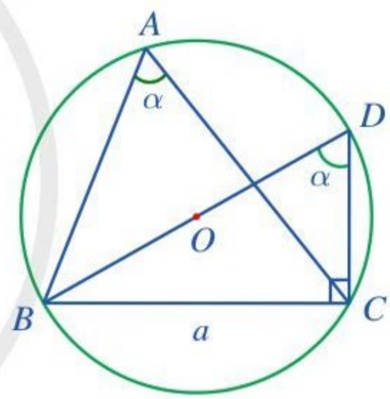
Vậy sau 2 giờ hai máy bay cách nhau khoảng 1 609,35 km.

III. ĐỊNH LÍ SIN

Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn tâm O, bán kính R và có $BC = a$, $\widehat{BAC} = \alpha$. Kẻ đường kính BD của đường tròn (O). Thực hiện các hoạt động sau:

9 Cho α là góc nhọn. Chứng minh:

a) $\widehat{BDC} = \alpha$; b) $\dfrac{a}{\sin\alpha} = 2R$.



Hình 12

Để chứng minh đẳng thức ở câu b, ta làm như sau (*Hình 12*):

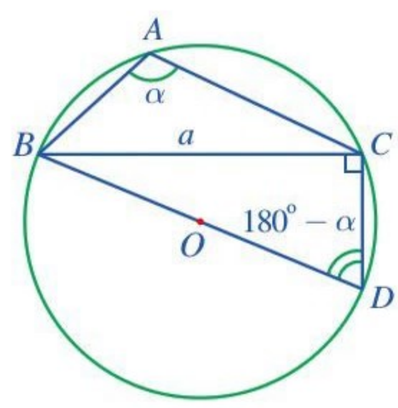
Xét tam giác BDC, ta có $\widehat{BDC} = \alpha$.

Vì BD là đường kính của đường tròn (O) nên $\widehat{BCD} = 90^\circ$.

Do đó $\sin D = \dfrac{BC}{BD}$, tức là $\sin a = \dfrac{a}{2R}$ hay $\dfrac{a}{\sin\alpha} = 2R$.

10 Cho α là góc tù. Chứng minh:

a) $\widehat{BDC} = 180^\circ - \alpha$; b) $\dfrac{a}{\sin\alpha} = 2R$.



Hình 13

Để chứng minh đẳng thức ở câu b, ta làm như sau (*Hình 13*):

Xét tam giác BCD, ta có:

$\widehat{BDC} = 180^\circ - \alpha$ và $\widehat{BCD} = 90^\circ$.

Do đó $\sin D = \dfrac{BC}{BD}$, tức là $\sin(180^\circ - \alpha) = \dfrac{a}{2R}$.

Mà $\sin(180^\circ - \alpha) = \sin\alpha$ nên $\sin\alpha = \dfrac{a}{2R}$ hay $\dfrac{a}{\sin\alpha} = 2R$.

11 Cho α là góc vuông. Chứng minh: $\dfrac{a}{\sin\alpha} = 2R$.

Như vậy, trong tam giác ABC tuỳ ý ta có: $\dfrac{a}{\sin\alpha} = 2R$.

Bằng cách chứng minh tương tự, ta có định lí sin sau đây:

> Cho tam giác ABC có $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$ và bán kính đường tròn ngoại tiếp là R. Khi đó:
>
> $$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R.$$

> $a = 2R\sin A,$
>
> $b = 2R\sin B,$
>
> $c = 2R\sin C.$

Ví dụ 6 Cho tam giác ABC có $\widehat{A} = 120^{\circ}$, $\widehat{B} = 45^{\circ}$ và $CA = 20$ (*Hình 14*). Tính:

a) $\sin A$;

b) Độ dài cạnh BC và bán kính R của đường tròn ngoại tiếp tam giác.

Giải

a) Ta có: $\sin A = \sin 120^{\circ} = \sin 60^{\circ} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

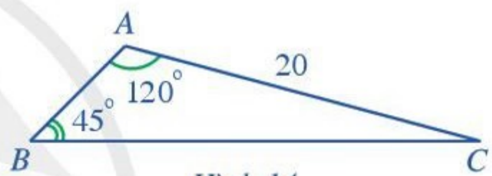
b) Áp dụng định lí sin trong tam giác ABC, ta có:

$$\frac{BC}{\sin A} = \frac{CA}{\sin B} = 2R.$$

Do đó

$$BC = \frac{CA\,.\,\sin A}{\sin B} = \frac{20\,.\,\sin 120^{\circ}}{\sin 45^{\circ}} = 10\sqrt{6};$$

$$R = \frac{CA}{2\,.\,\sin B} = \frac{20}{2\,.\,\sin 45^{\circ}} = 10\sqrt{2}.$$



Hình 14

> **3** Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) có bán kính $R = 6$ và có các góc $\widehat{B} = 65^{\circ}$, $\widehat{C} = 85^{\circ}$. Tính độ dài cạnh BC.

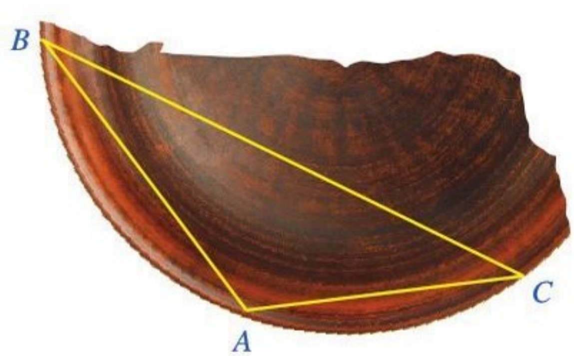
Ví dụ 7 Các nhà khảo cổ học tìm được một mảnh chiếc đĩa cổ hình tròn bị vỡ. Để xác định đường kính của chiếc đĩa, họ lấy ba điểm trên vành đĩa và tiến hành đo đạc thu được kết quả như sau: $BC \approx 28{,}5$ cm, $\widehat{BAC} \approx 120^{\circ}$ (*Hình 15*). Tính đường kính của chiếc đĩa theo đơn vị xăng-ti-mét (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).

Giải

Áp dụng định lí sin trong tam giác ABC, ta có:

$$2R = \frac{BC}{\sin A} \approx \frac{28{,}5}{\sin 120^{\circ}} \approx 33 \text{ (cm)}.$$

Vậy đường kính của chiếc đĩa khoảng 33 cm.



Hình 15

BÀI TẬP

1. Cho tam giác ABC có $AB = 3{,}5$; $AC = 7{,}5$; $\widehat{A} = 135^o$. Tính độ dài cạnh BC và bán kính R của đường tròn ngoại tiếp tam giác (làm tròn kết quả đến hàng phần mười).

2. Cho tam giác ABC có $\widehat{B} = 75^o$, $\widehat{C} = 45^o$ và $BC = 50$. Tính độ dài cạnh AB.

3. Cho tam giác ABC có $AB = 6$, $AC = 7$, $BC = 8$. Tính $\cos A$, $\sin A$ và bán kính R của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

4. Tính giá trị của các biểu thức sau (không dùng máy tính cầm tay):

a) $A = \cos 0^o + \cos 40^o + \cos 120^o + \cos 140^o$;

b) $B = \sin 5^o + \sin 150^o - \sin 175^o + \sin 180^o$;

c) $C = \cos 15^o + \cos 35^o - \sin 75^o - \sin 55^o$;

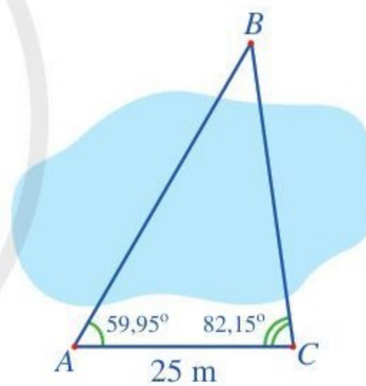
d) $D = \tan 25^o \,.\, \tan 45^o \,.\, \tan 115^o$;

e) $E = \cot 10^o \,.\, \cot 30^o \,.\, \cot 100^o$.

5. Cho tam giác ABC. Chứng minh:

a) $\sin\dfrac{A}{2} = \cos\dfrac{B+C}{2}$; b) $\tan\dfrac{B+C}{2} = \cot\dfrac{A}{2}$.

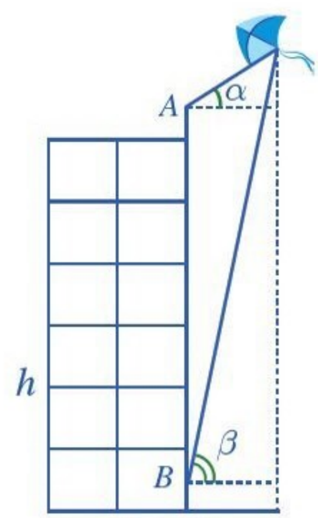
6. Để đo khoảng cách từ vị trí A đến vị trí B ở hai bên bờ một cái ao, bạn An đi dọc bờ ao từ vị trí A đến vị trí C và tiến hành đo các góc BAC, BCA. Biết $AC = 25$ m, $\widehat{BAC} = 59{,}95^o$, $\widehat{BCA} = 82{,}15^o$ (*Hình 16*). Hỏi khoảng cách từ vị trí A đến vị trí B là bao nhiêu mét (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)?



Hình 16

7. Hai tàu đánh cá cùng xuất phát từ bến A và đi thẳng đều về hai vùng biển khác nhau, theo hai hướng tạo với nhau góc 75^o. Tàu thứ nhất chạy với tốc độ 8 hải lí một giờ và tàu thứ hai chạy với tốc độ 12 hải lí một giờ. Sau 2,5 giờ thì khoảng cách giữa hai tàu là bao nhiêu hải lí (làm tròn kết quả đến hàng phần mười)?

8. Bạn A đứng ở nóc của toà nhà và quan sát chiếc diều, nhận thấy góc nâng (góc nghiêng giữa phương từ mắt của bạn A tới chiếc diều và phương nằm ngang) là $\alpha = 35^o$; khoảng cách từ nóc toà nhà tới mắt bạn A là 1,5 m. Cùng lúc đó ở dưới chân toà nhà, bạn B cũng quan sát chiếc diều và thấy góc nâng là $\beta = 75^o$; khoảng cách từ mặt đất đến mắt bạn B cũng là 1,5 m. Biết chiều cao của toà nhà là $h = 20$ m (*Hình 17*). Chiếc diều bay cao bao nhiêu mét so với mặt đất (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)?

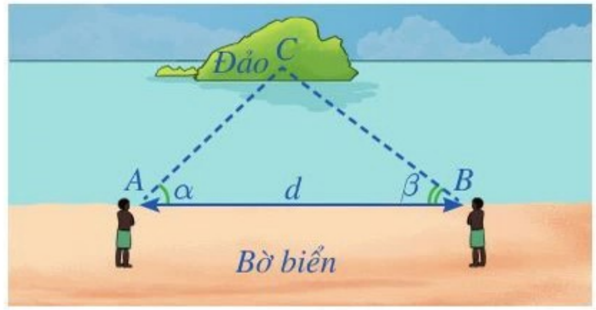


Hình 17

§2 GIẢI TAM GIÁC

Từ xa xưa, con người đã cần đo đạc các khoảng cách mà không thể đo trực tiếp được. Chẳng hạn, để đo khoảng cách từ vị trí A trên bờ biển tới một hòn đảo (hay con tàu, ...) trên biển, người xưa đã tìm ra một cách đo khoảng cách đó như sau:

Từ vị trí A, đo góc nghiêng α so với bờ biển tới một vị trí C quan sát được trên đảo. Sau đó di chuyển dọc bờ biển đến vị trí B cách A một khoảng d và tiếp tục đo góc nghiêng β so với bờ biển tới vị trí C đã chọn (*Hình 18*). Bằng cách giải tam giác ABC, họ tính được khoảng cách AC.



Hình 18

Giải tam giác được hiểu như thế nào?

I. TÍNH CÁC CẠNH VÀ GÓC CỦA TAM GIÁC DỰA TRÊN MỘT SỐ ĐIỀU KIỆN CHO TRƯỚC

Như ta đã biết, một tam giác hoàn toàn xác định nếu biết một trong những dữ kiện sau:

– Biết độ dài hai cạnh và độ lớn góc xen giữa hai cạnh đó;

– Biết độ dài ba cạnh;

– Biết độ dài một cạnh và độ lớn hai góc kề với cạnh đó.

Giải tam giác là tính các cạnh và các góc của tam giác dựa trên những dữ kiện cho trước.

1 Cho tam giác ABC có $AB = c, AC = b, \widehat{A} = \alpha$. Viết công thức tính BC theo b, c, α.

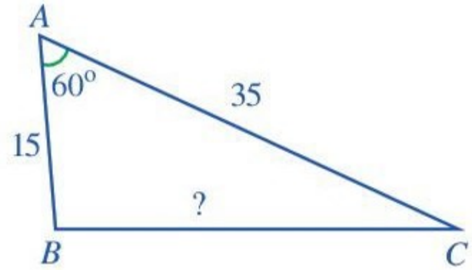
Ví dụ 1 Cho tam giác ABC có $AB = 15, AC = 35, \widehat{A} = 60^{\circ}$ (*Hình 19*). Tính cạnh BC (làm tròn kết quả đến hàng phần mười) và góc B (làm tròn kết quả đến độ).

Giải

Áp dụng định lí côsin trong tam giác ABC, ta có:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \,.\, AB \,.\, AC \,.\, \cos A$$
$$= 15^2 + 35^2 - 2 \,.\, 15 \,.\, 35 \,.\, \cos 60^{\circ} = 925.$$

Do đó $BC = \sqrt{925} \approx 30{,}4$.



Hình 19

Ta có: $\cos B = \dfrac{AB^2 + BC^2 - AC^2}{2 \,.\, AB \,.\, BC} = \dfrac{15^2 + 925 - 35^2}{2 \,.\, 15 \,.\, \sqrt{925}}$.

Do đó $\widehat{B} \approx 95^{\circ}$.

2 Cho tam giác ABC có $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$. Viết công thức tính $\cos A$ theo a, b, c.

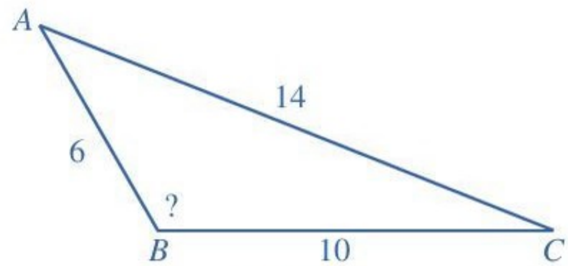
Ví dụ 2 Cho tam giác ABC có $AB = 6$, $BC = 10$, $CA = 14$ (*Hình 20*). Tính số đo góc B.

Giải

Áp dụng định lí côsin trong tam giác ABC, ta có:

$$\cos B = \frac{AB^2 + BC^2 - AC^2}{2 . AB . BC} = \frac{6^2 + 10^2 - 14^2}{2 . 6 . 10} = -0,5.$$

Do đó $\widehat{B} = 120^\circ$.



Hình 20

3 Viết công thức định lí sin cho tam giác ABC.

Ví dụ 3 Cho tam giác ABC có $BC = 100$, $\widehat{B} = 60^\circ$, $\widehat{C} = 40^\circ$ (*Hình 21*). Tính góc A và các cạnh AB, AC (làm tròn kết quả đến hàng phần mười) của tam giác đó.

Giải

Ta có:

$$\widehat{A} = 180^\circ - (\widehat{B} + \widehat{C}) = 180^\circ - (60^\circ + 40^\circ) = 80^\circ.$$

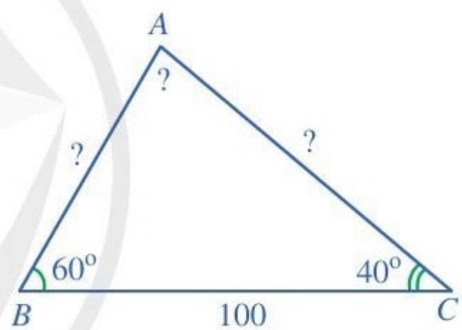
Áp dụng định lí sin trong tam giác ABC, ta có:

$$\frac{AB}{\sin C} = \frac{BC}{\sin A} = \frac{CA}{\sin B}.$$

Do đó

$$AB = \frac{BC . \sin C}{\sin A} = \frac{100 . \sin 40^\circ}{\sin 80^\circ} \approx 65,3;$$

$$AC = \frac{BC . \sin B}{\sin A} = \frac{100 . \sin 60^\circ}{\sin 80^\circ} \approx 87,9.$$



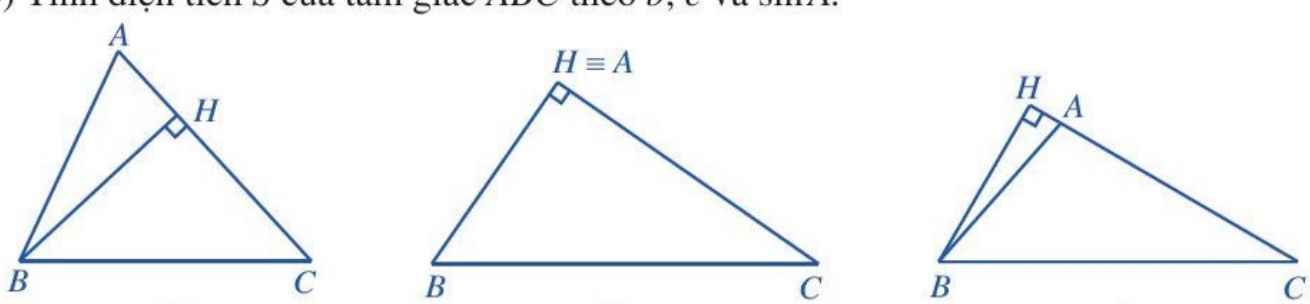
Hình 21

II. TÍNH DIỆN TÍCH TAM GIÁC

4 Cho tam giác ABC có $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$. Kẻ đường cao BH.

a) Tính BH theo c và $\sin A$.

b) Tính diện tích S của tam giác ABC theo b, c và $\sin A$.



a) *b)* *c)*

Hình 22

Để tính độ dài BH và diện tích tam giác ABC, ta làm như sau:

a) Xét các trường hợp:

Với $\widehat{A} < 90^{\circ}$ (*Hình 22a*). Xét tam giác vuông AHB, ta có: $BH = AB.\sin A = c\sin A$.

Với $\widehat{A} = 90^{\circ}$ (*Hình 22b*). Khi đó, $BH = BA = c = c\sin A$.

Với $\widehat{A} > 90^{\circ}$ (*Hình 22c*). Xét tam giác vuông AHB, ta có: $\widehat{BAH} = 180^{\circ} - \widehat{A}$.

Do đó $BH = AB.\sin(180^{\circ} - \widehat{A}) = AB.\sin A = c\sin A$.

Như vậy, trong mọi trường hợp ta đều có $BH = c\sin A$.

b) Ta có:

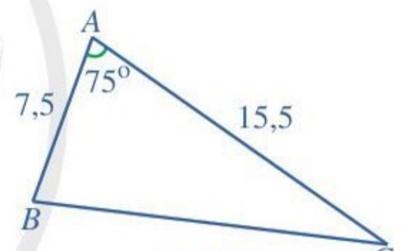
$$S = \frac{1}{2}AC.BH = \frac{1}{2}bc\sin A.$$

Bằng cách chứng minh tương tự, ta có công thức tính diện tích tam giác như sau:

Cho tam giác ABC có $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$. Khi đó, diện tích S của tam giác ABC là:

$$S = \frac{1}{2}bc\sin A = \frac{1}{2}ca\sin B = \frac{1}{2}ab\sin C.$$

Ví dụ 4 Cho tam giác ABC có $AB = 7{,}5$; $AC = 15{,}5$; $\widehat{A} = 75^{\circ}$ (*Hình 23*). Tính diện tích S của tam giác ABC (làm tròn kết quả đến hàng phần mười).



Hình 23

Giải

Ta có: $S = \frac{1}{2}AB.AC.\sin A$

$= \frac{1}{2}.7{,}5.15{,}5.\sin 75^{\circ}$

$\approx 56{,}1.$

1 Cho tam giác ABC có $AB = 12$; $\widehat{B} = 60^{\circ}$; $\widehat{C} = 45^{\circ}$. Tính diện tích của tam giác ABC.

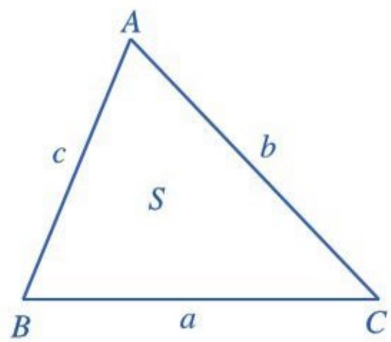
5 Cho tam giác ABC có $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$ và diện tích là S (*Hình 24*).

a) Từ định lí côsin, chứng tỏ rằng:

$\sin A = \frac{2}{bc}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, ở đó $p = \frac{a+b+c}{2}$.

b) Bằng cách sử dụng công thức $S = \frac{1}{2}bc\sin A$, hãy chứng tỏ rằng:

$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$



Hình 24

Ta có công thức Heron để tính diện tích tam giác theo độ dài ba cạnh của nó như sau:

Cho tam giác ABC có $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$, $p = \dfrac{a+b+c}{2}$. Khi đó, diện tích S của tam giác ABC là:

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

Ví dụ 5 Mảnh vườn hình tam giác của gia đình bạn Nam có chiều dài các cạnh là $MN = 20$ m, $NP = 28$ m, $MP = 32$ m (*Hình 25*). Hỏi diện tích mảnh vườn của gia đình bạn Nam là bao nhiêu mét vuông (làm tròn đến hàng phần mười)?

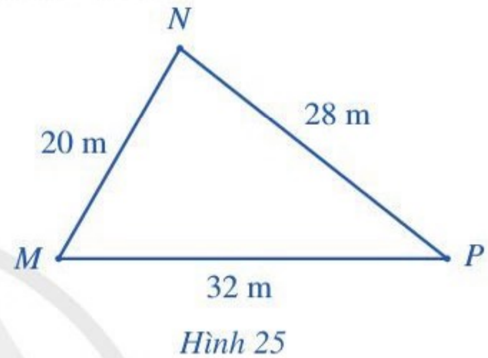
Giải

Ta có: $p = \dfrac{20+28+32}{2} = 40$ (m).

Diện tích mảnh vườn là:

$$S = \sqrt{40(40-20)(40-28)(40-32)}$$

$\approx 277{,}1$ (m^2).

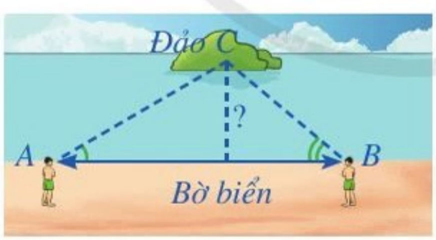


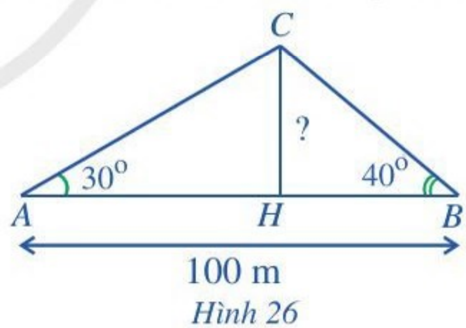
Hình 25

III. ÁP DỤNG VÀO BÀI TOÁN THỰC TIỄN

Ví dụ 6 Đứng ở vị trí A trên bờ biển, bạn Minh đo được góc nghiêng so với bờ biển tới một vị trí C trên đảo là 30^o. Sau đó di chuyển dọc bờ biển đến vị trí B cách A một khoảng 100 m và đo được góc nghiêng so với bờ biển tới vị trí C đã chọn là 40^o.

Tính khoảng cách từ vị trí C trên đảo tới bờ biển theo đơn vị mét (làm tròn kết quả đến hàng phần mười).





Hình 26

Giải

Xét tam giác ABC (*Hình 26*), ta có: $\widehat{C} = 180^o - (30^o + 40^o) = 110^o$.

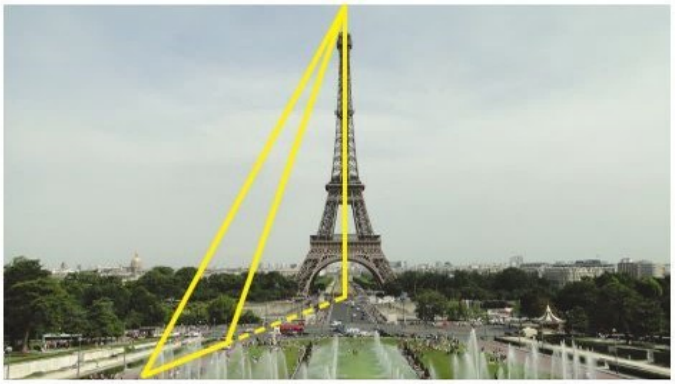
Áp dụng định lí sin trong tam giác ABC, ta có: $\dfrac{AC}{\sin B} = \dfrac{AB}{\sin C}$.

Do đó $AC = \dfrac{AB \,.\, \sin B}{\sin C} = \dfrac{100 \,.\, \sin 40^o}{\sin 110^o} \approx 68{,}4$ (m).

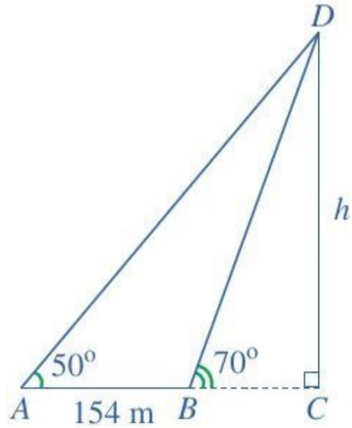
Xét tam giác vuông AHC, ta có: $CH = AC \,.\, \sin 30^o \approx 68{,}4 \,.\, 0{,}5 \approx 34{,}2$ (m).

Vậy khoảng cách từ vị trí C trên đảo tới bờ biển khoảng 34,2 m.

Ví dụ 7 Trong lần đến tham quan tháp Eiffel (ở Thủ đô Paris, Pháp), bạn Phương muốn ước tính độ cao của tháp. Sau khi quan sát, bạn Phương đã minh hoạ lại kết quả đo đạc ở *Hình 27*. Em hãy giúp bạn Phương tính độ cao h của tháp Eiffel theo đơn vị mét (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).



(*Nguồn: https://pixabay.com*)



Hình 27

Giải

Xét tam giác ABD, sử dụng tính chất góc ngoài, ta có:
$\widehat{ADB} = 70^\circ - 50^\circ = 20^\circ$.

Áp dụng định lí sin cho tam giác ABD, ta có:

$$\frac{BD}{\sin\widehat{BAD}} = \frac{AB}{\sin\widehat{ADB}}.$$

Do đó $BD = \dfrac{154 \,.\, \sin 50^\circ}{\sin 20^\circ} \approx 345$ (m).

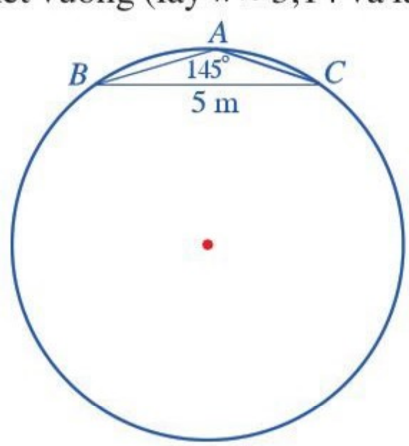
Xét tam giác vuông BCD, ta có:

$$CD = BD \,.\, \sin\widehat{CBD} \approx 345 \,.\, \sin 70^\circ \approx 324 \text{ (m)}.$$

Vậy chiều cao h của tháp Eiffel khoảng 324 m.

2 Từ trên nóc của một toà nhà cao 18,5 m, bạn Nam quan sát một cái cây cách toà nhà 30 m và dùng giác kế đo được góc lệch giữa phương quan sát gốc cây và phương nằm ngang là 34°, góc lệch giữa phương quan sát ngọn cây và phương nằm ngang là 24°. Biết chiều cao của chân giác kế là 1,5 m. Chiều cao của cái cây là bao nhiêu mét (làm tròn kết quả đến hàng phần mười)?

Ví dụ 8 Để tính đường kính và diện tích của một giếng nước có dạng hình tròn, người ta tiến hành đo đạc tại ba vị trí A, B, C trên thành giếng. Kết quả đo được là: $BC = 5$ m, $\widehat{BAC} = 145^\circ$ (*Hình 28*). Diện tích của giếng là bao nhiêu mét vuông (lấy $\pi \approx 3,14$ và làm tròn kết quả đến hàng phần trăm)?



Hình 28

Giải

Áp dụng định lí sin cho tam giác ABC, ta có: $\dfrac{BC}{\sin A} = 2R$.

Do đó $R = \dfrac{BC}{2 \,.\, \sin A} = \dfrac{5}{2 \,.\, \sin 145^{\circ}} \approx 4{,}36$ (m).

Vậy diện tích của giếng là: $S = \pi R^2 \approx 3{,}14 \,.\, 4{,}36^2 \approx 59{,}69$ (m^2).

BÀI TẬP

1. Cho tam giác ABC có $BC = 12$, $CA = 15$, $\widehat{C} = 120^{\circ}$. Tính:

a) Độ dài cạnh AB; b) Số đo các góc A, B; c) Diện tích tam giác ABC.

2. Cho tam giác ABC có $AB = 5$, $BC = 7$, $\widehat{A} = 120^{\circ}$. Tính độ dài cạnh AC.

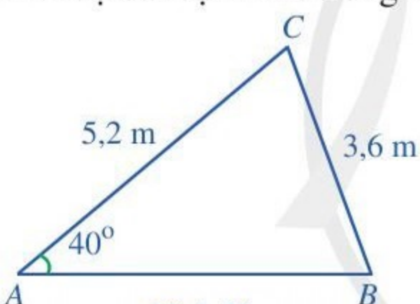
3. Cho tam giác ABC có $AB = 100$, $\widehat{B} = 100^{\circ}$, $\widehat{C} = 45^{\circ}$. Tính:

a) Độ dài các cạnh AC, BC; b) Diện tích tam giác ABC.

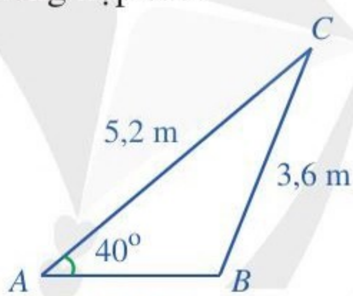
4. Cho tam giác ABC có $AB = 12$, $AC = 15$, $BC = 20$. Tính:

a) Số đo các góc A, B, C; b) Diện tích tam giác ABC.

5. Tính độ dài cạnh AB trong mỗi trường hợp sau:

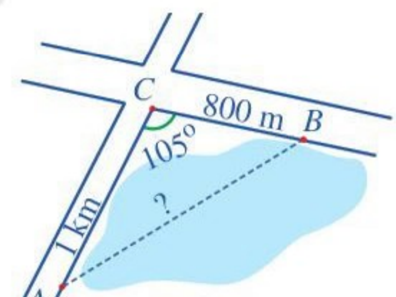


Hình 29



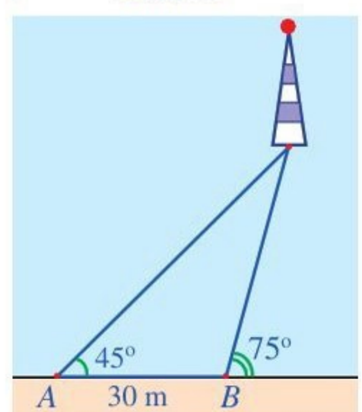
Hình 30

6. Để tính khoảng cách giữa hai địa điểm A và B mà ta không thể đi trực tiếp từ A đến B (hai địa điểm nằm ở hai bên bờ một hồ nước, một đầm lầy, ...), người ta tiến hành như sau: Chọn một địa điểm C sao cho ta đo được các khoảng cách AC, CB và góc ACB. Sau khi đo, ta nhận được: $AC = 1$ km, $CB = 800$ m và $\widehat{ACB} = 105^{\circ}$ (*Hình 31*). Tính khoảng cách AB (làm tròn kết quả đến hàng phần mười theo đơn vị mét).



Hình 31

7. Một người đi dọc bờ biển từ vị trí A đến vị trí B và quan sát một ngọn hải đăng. Góc nghiêng của phương quan sát từ các vị trí A, B tới ngọn hải đăng với đường đi của người quan sát là 45° và 75°. Biết khoảng cách giữa hai vị trí A, B là 30 m (*Hình 32*). Ngọn hải đăng cách bờ biển bao nhiêu mét (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)?



Hình 32

TÌM HIỂU THÊM

Cho tam giác ABC có $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$. Gọi R, r, p và S lần lượt là bán kính đường tròn ngoại tiếp, bán kính đường tròn nội tiếp, nửa chu vi và diện tích của tam giác ABC.

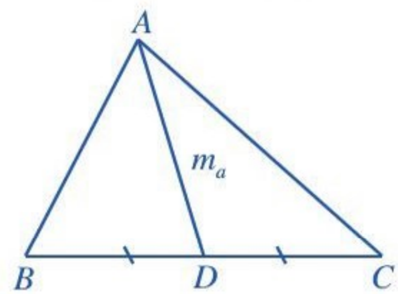
1. Công thức độ dài đường trung tuyến

Gọi m_a, m_b, m_c là độ dài các đường trung tuyến lần lượt xuất phát từ các đỉnh A, B, C của tam giác ABC. Ta có:

$$m_a^2 = \frac{b^2 + c^2}{2} - \frac{a^2}{4},$$

$$m_b^2 = \frac{c^2 + a^2}{2} - \frac{b^2}{4},$$

$$m_c^2 = \frac{a^2 + b^2}{2} - \frac{c^2}{4}.$$



Hình 33

Chứng minh

Gọi D là trung điểm của BC (*Hình 33*), ta có:

$$AD = m_a, BD = DC = \frac{a}{2}.$$

Áp dụng định lí côsin cho tam giác ABD, ta có:

$$AD^2 = AB^2 + BD^2 - 2AB \,.\, BD \,.\, \cos\widehat{ABD} = c^2 + \frac{a^2}{4} - ca\cos B.$$

Áp dụng định lí côsin cho tam giác ABC, ta có:

$$\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}.$$

Suy ra $$m_a^2 = c^2 + \frac{a^2}{4} - \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2} = \frac{b^2 + c^2}{2} - \frac{a^2}{4}.$$

Chứng minh tương tự, ta có:

$$m_b^2 = \frac{c^2 + a^2}{2} - \frac{b^2}{4}, \quad m_c^2 = \frac{a^2 + b^2}{2} - \frac{c^2}{4}.$$

2. Công thức tính bán kính đường tròn nội tiếp và bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác

Ta có hai công thức sau:

$$r = \frac{S}{p}, \qquad R = \frac{abc}{4S}.$$

Em hãy chứng minh các công thức trên.

§3 KHÁI NIỆM VECTƠ

(*Nguồn: https://pixabay.com*)

Hình 34

Mũi tên xuất phát từ A đến B trong *Hình 34* mô tả chuyển động (có hướng) của một máy bay trên đường băng.

Đoạn thẳng AB có hướng được gọi là gì?

I. KHÁI NIỆM VECTƠ

1 Trong công viên, để chỉ dẫn hướng đi và khoảng cách từ cổng đến khu vui chơi của trẻ em, người ta vẽ đoạn thẳng có mũi tên như ở *Hình 35*. Hình ảnh về mũi tên chỉ dẫn cho biết những thông tin gì?

Hình 35

Trên Hình 35, ta có:

- *Hướng quy định trên đoạn thẳng AB là hướng xuất phát từ điểm đầu A đến điểm cuối B;*
- *Đoạn thẳng AB có độ dài bằng* 200 m.

Vectơ là một đoạn thẳng có hướng.

Vectơ có điểm đầu là A, điểm cuối là B được kí hiệu là $\overrightarrow{AB}$, đọc là "vectơ AB".

Hình 36

Để vẽ vectơ $\overrightarrow{AB}$ ta vẽ đoạn thẳng AB và đánh dấu mũi tên ở đầu mút B (*Hình 36*).

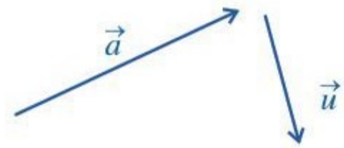
Đối với vectơ $\overrightarrow{AB}$, ta gọi:

Hình 37

– Đường thẳng d đi qua hai điểm A và B là *giá* của vectơ $\overrightarrow{AB}$ (*Hình 37*);

– Độ dài đoạn thẳng AB là *độ dài* của vectơ $\overrightarrow{AB}$, kí hiệu là $|\overrightarrow{AB}|$.

Khi không cần chỉ rõ điểm đầu và điểm cuối của vectơ, vectơ còn được kí hiệu là $\vec{a}, \vec{b}, \vec{u}, \vec{v}$, ... (*Hình 38*). Độ dài của vectơ $\vec{a}$ được kí hiệu là $|\vec{a}|$.



Hình 38

1 Cho tam giác ABC. Viết tất cả các vectơ mà điểm đầu và điểm cuối là A, B hoặc C.

Ví dụ 1 Cho hai điểm phân biệt H, K. Viết các vectơ (có điểm đầu khác điểm cuối) mà hai đầu mút của mỗi vectơ là hai điểm đã cho.

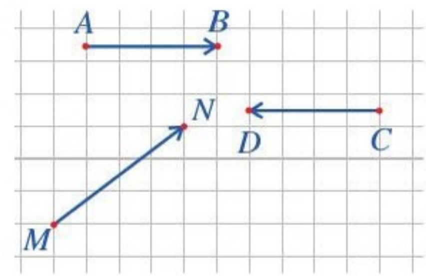
Giải. Hai vectơ thoả mãn yêu cầu đề bài là $\overrightarrow{HK}$ và $\overrightarrow{KH}$.

Ví dụ 2 Tính độ dài của các vectơ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}$ và $\overrightarrow{MN}$ ở *Hình 39*, biết rằng độ dài cạnh của ô vuông bằng 1 cm.

Giải

$$|\overrightarrow{AB}| = 4 \text{ cm}, |\overrightarrow{CD}| = 4 \text{ cm},$$

$$|\overrightarrow{MN}| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5 \text{ (cm)}.$$

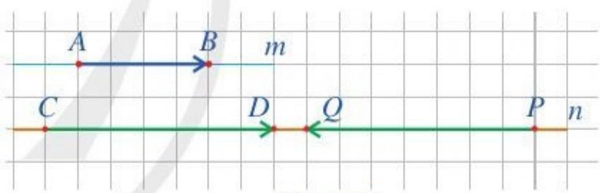


Hình 39

II. VECTƠ CÙNG PHƯƠNG, VECTƠ CÙNG HƯỚNG

2 Quan sát *Hình 40* và cho biết vị trí tương đối giữa giá của vectơ $\overrightarrow{CD}$ với giá của vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{PQ}$.

Hai vectơ được gọi là *cùng phương* nếu giá của chúng song song hoặc trùng nhau.



Hình 40

3 Quan sát hai biển báo ở *Hình 41a, 41b,* cho biết hai vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{CD}$ có cùng hướng hay không.

Nhận xét: Nếu hai vectơ cùng phương thì chúng cùng hướng hoặc ngược hướng.

Biển báo hướng đi về bên phải
a)

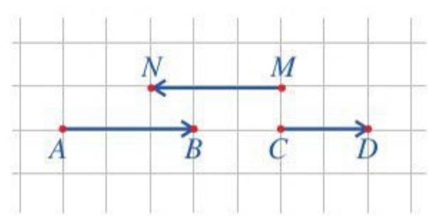
Biển báo hướng đi về bên trái
b)

Hình 41

Ví dụ 3 Trong *Hình 42*, tìm vectơ cùng hướng với vectơ $\overrightarrow{AB}$; ngược hướng với vectơ $\overrightarrow{AB}$.

Giải

Vectơ $\overrightarrow{CD}$ cùng hướng với vectơ $\overrightarrow{AB}$, vectơ $\overrightarrow{MN}$ ngược hướng với vectơ $\overrightarrow{AB}$.



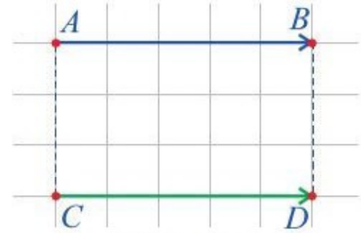
Hình 42

III. HAI VECTƠ BẰNG NHAU

4 Quan sát hai vectơ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ ở *Hình 43*.

a) Nhận xét về phương, về hướng của hai vectơ đó.

b) So sánh độ dài của hai vectơ đó.



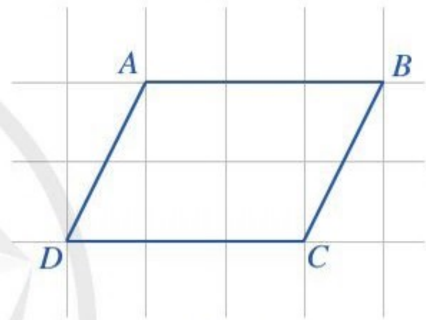
Hình 43

Hai vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{CD}$ có cùng hướng và cùng độ dài.

Hai vectơ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ *bằng nhau* nếu chúng cùng hướng và cùng độ dài, kí hiệu: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.

Nhận xét

- Hai vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$ bằng nhau nếu chúng cùng hướng và cùng độ dài, kí hiệu $\vec{a} = \vec{b}$.
- Khi cho trước vectơ $\vec{a}$ và điểm O, thì ta luôn tìm được một điểm A duy nhất sao cho $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$.



Hình 44

Ví dụ 4 Cho hình bình hành $ABCD$ (*Hình 44*).

a) Vectơ nào bằng vectơ $\overrightarrow{AB}$?

b) Vectơ nào bằng vectơ $\overrightarrow{AD}$?

Giải

a) Vì $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{DC}$ cùng hướng và $AB = DC$ nên $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.

b) Vì $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BC}$ cùng hướng và $AD = BC$ nên $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$.

2 Cho tam giác ABC. Vẽ điểm D thoả mãn $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$. Tứ giác $ABCD$ là hình gì?

IV. VECTƠ-KHÔNG

Cho điểm A, ta xét một vectơ đặc biệt, trong đó A vừa là điểm đầu vừa là điểm cuối. Vectơ này được kí hiệu là $\overrightarrow{AA}$ và gọi là *vectơ-không*.

Vectơ-không là vectơ có điểm đầu và điểm cuối trùng nhau, kí hiệu là $\vec{0}$.

Ta quy ước $\vec{0}$ (vectơ-không) cùng phương, cùng hướng với mọi vectơ và $|\vec{0}| = 0$. Do đó có thể coi mọi vectơ-không đều bằng nhau. Như vậy, $\vec{0} = \overrightarrow{AA} = \overrightarrow{BB} = \ldots$ với mọi điểm $A, B\ldots$

Nhận xét: Hai điểm A, B trùng nhau khi và chỉ khi $\overrightarrow{AB} = \vec{0}$.

V. BIỂU THỊ MỘT SỐ ĐẠI LƯỢNG CÓ HƯỚNG BẰNG VECTƠ

Trong vật lí, một số đại lượng như: lực, vận tốc, … là đại lượng có hướng. Người ta dùng vectơ để biểu thị các đại lượng có hướng đó, chẳng hạn:

Một lực $\overrightarrow{F}$ tác động lên xe tại điểm đặt A; lực $\overrightarrow{F}$ có phương nằm ngang, hướng từ trái sang phải và cường độ là 40 N. Ta biểu thị lực $\overrightarrow{F}$ bằng vectơ $\overrightarrow{AB}$ như *Hình 45*.

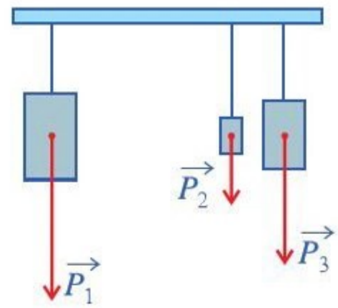
Hình 45

Ví dụ 5 Khi treo ba vật, mỗi vật sẽ tác dụng vào thanh treo một lực (trọng lực) như ở *Hình 46*.

Nhận xét đặc điểm về phương, hướng của ba vectơ biểu thị trọng lực.

Giải

Trong vật lí, các vectơ trọng lực có cùng hướng nên ba vectơ $\overrightarrow{P_1}$, $\overrightarrow{P_2}$, $\overrightarrow{P_3}$ biểu thị trọng lực có cùng hướng.



Hình 46

BÀI TẬP

1. Cho A, B, C là ba điểm thẳng hàng, B nằm giữa A và C. Viết các cặp vectơ cùng hướng, ngược hướng trong những vectơ sau: $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{CB}$.

2. Cho đoạn thẳng MN có trung điểm là I.

a) Viết các vectơ khác vectơ-không có điểm đầu, điểm cuối là một trong ba điểm M, N, I.

b) Vectơ nào bằng $\overrightarrow{MI}$? Bằng $\overrightarrow{NI}$?

3. Cho hình thang $ABCD$ có hai đáy là AB và CD. Tìm vectơ:

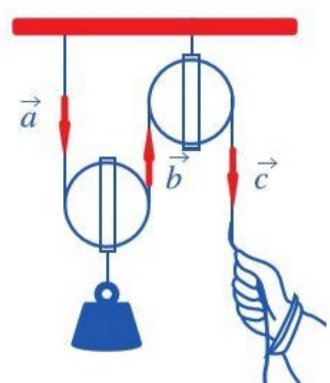
a) Cùng hướng với $\overrightarrow{AB}$; b) Ngược hướng với $\overrightarrow{AB}$.

4. Cho hình vuông $ABCD$ có độ dài cạnh bằng 3 cm. Tính độ dài của các vectơ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$.

5. Quan sát ròng rọc hoạt động khi dùng lực để kéo một đầu của ròng rọc. Chuyển động của các đoạn dây được mô tả bằng các vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ (*Hình 47*).

a) Hãy chỉ ra các cặp vectơ cùng phương.

b) Trong các cặp vectơ đó, cho biết chúng cùng hướng hay ngược hướng.



Hình 47

§4 TỔNG VÀ HIỆU CỦA HAI VECTƠ

Quan sát hình ảnh hai người cùng kéo một chiếc thuyền theo hai hướng khác nhau (*Hình 48*). Tuy nhiên, chiếc thuyền lại không di chuyển theo cùng hướng với một trong hai người đó mà di chuyển theo một hướng khác.

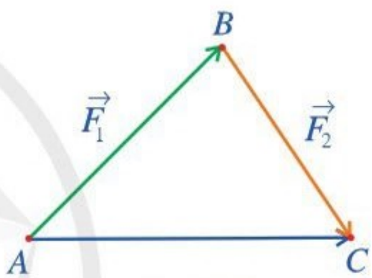
Hình 48

Tại sao chiếc thuyền lại di chuyển như vậy?

I. TỔNG CỦA HAI VECTƠ

1. Định nghĩa

1 Một vật dịch chuyển từ A đến B sau khi chịu tác động của lực $\overrightarrow{F_1}$. Vật tiếp tục dịch chuyển từ B đến C sau khi chịu tác động của lực $\overrightarrow{F_2}$ (*Hình 49*). Sau khi chịu tác động của hai lực $\overrightarrow{F_1}$, $\overrightarrow{F_2}$, vật đó dịch chuyển từ vị trí A đến vị trí nào?



Hình 49

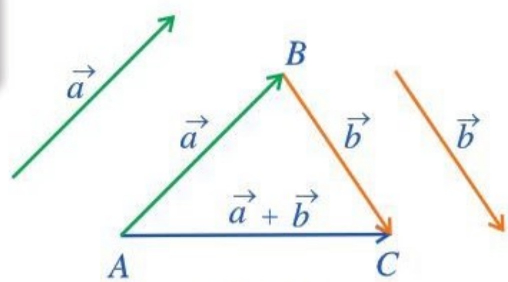
Ta có định nghĩa sau:

> Với ba điểm bất kì A, B, C, vectơ $\overrightarrow{AC}$ được gọi là tổng của hai vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{BC}$, kí hiệu là $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$.

2 Cho hai vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$. Lấy một điểm A tuỳ ý.

a) Vẽ $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$ (*Hình 50*).

b) Tổng của hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ bằng vectơ nào?



Hình 50

> Cho hai vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$. Lấy một điểm A tuỳ ý, vẽ $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$.
> Vectơ $\overrightarrow{AC}$ được gọi là tổng của hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$, kí hiệu $\overrightarrow{AC} = \vec{a} + \vec{b}$.

Phép lấy tổng của hai vectơ còn được gọi là *phép cộng vectơ.*

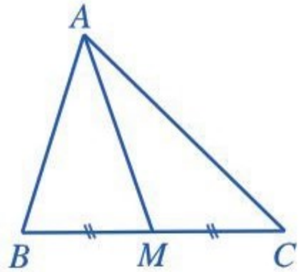
Ví dụ 1 Cho tam giác ABC có trung tuyến AM (*Hình 51*).

Chứng minh $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{AM}$.

Giải

Vì $\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{BM}$ nên

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AM}$.



Hình 51

1 Cho tam giác ABC. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của BC, CA, AB. Chứng minh

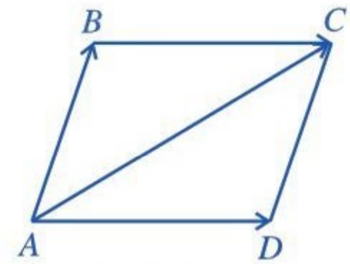
$$\overrightarrow{PB} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{AN}.$$

2. Quy tắc hình bình hành

3 Cho $ABCD$ là hình bình hành (*Hình 52*). So sánh:

a) Hai vectơ $\overrightarrow{AD}$ và $\overrightarrow{BC}$.

b) Vectơ tổng $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$ và vectơ $\overrightarrow{AC}$.



Hình 52

Nếu $ABCD$ là hình bình hành thì $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$.

Ví dụ 2 Cho hình chữ nhật $ABCD$.

Chứng minh $\left|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}\right| = \left|\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}\right|$.

Giải

Theo quy tắc hình bình hành, ta có: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BD}$.

Suy ra $\left|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}\right| = \left|\overrightarrow{AC}\right| = AC$, $\left|\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}\right| = \left|\overrightarrow{BD}\right| = BD$.

Do $AC = BD$ nên $\left|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}\right| = \left|\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}\right|$.

2 Hãy giải thích hướng đi của thuyền ở *Hình 48*.

3. Tính chất

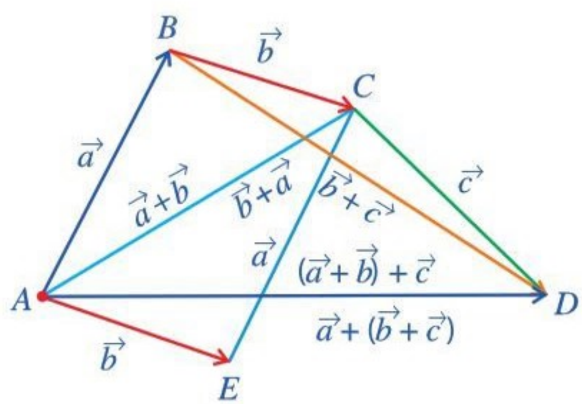
Với ba vectơ tuỳ ý $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ ta có:

- $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ (tính chất giao hoán);
- $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$ (tính chất kết hợp);
- $\vec{a} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{a} = \vec{a}$ (tính chất của vectơ-không).

(*Hình 53*)

Chú ý: Tổng ba vectơ $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ được xác định theo một trong hai cách:

$(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$ hoặc $\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$.



Hình 53. Minh hoạ tính chất phép cộng các vectơ

Ví dụ 3 Cho bốn điểm A, B, C, D. Chứng minh

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}.$$

Giải

Ta có: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}$

$= (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD}.$

3 Cho hình bình hành $ABCD$ và điểm E bất kì. Chứng minh

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CE} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AE}$.

II. HIỆU CỦA HAI VECTƠ

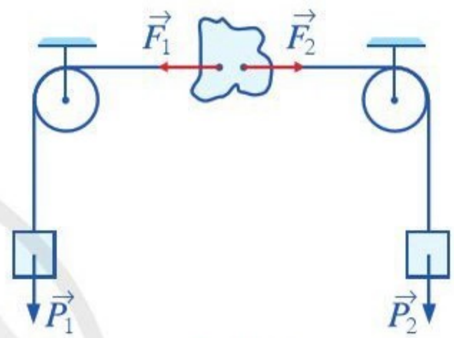
1. Hai vectơ đối nhau

4 Trong *Hình 54*, hai ròng rọc có trục quay nằm ngang và song song với nhau, hai vật có trọng lượng bằng nhau. Mỗi dây có một đầu buộc vào vật, một đầu buộc vào một mảnh nhựa cứng. Hai vật lần lượt tác động lên mảnh nhựa các lực $\overrightarrow{F_1}, \overrightarrow{F_2}$. Nhận xét về hướng và độ dài của mỗi cặp vectơ sau:

a) $\overrightarrow{P_1}$ và $\overrightarrow{P_2}$ biểu diễn trọng lực của hai vật;

b) $\overrightarrow{F_1}$ và $\overrightarrow{F_2}$.

(Bỏ qua trọng lượng của các dây và các lực ma sát)



Hình 54

Vectơ có cùng độ dài và ngược hướng với vectơ $\vec{a}$ được gọi là *vectơ đối* của vectơ $\vec{a}$, kí hiệu là $-\vec{a}$. Hai vectơ $\vec{a}$ và $-\vec{a}$ được gọi là hai vectơ đối nhau.

Quy ước: Vectơ đối của vectơ $\vec{0}$ là vectơ $\vec{0}$.

Nhận xét:
- $\vec{a} + (-\vec{a}) = (-\vec{a}) + \vec{a} = \vec{0}$.
- Hai vectơ $\vec{a}, \vec{b}$ là hai vectơ đối nhau khi và chỉ khi $\vec{a} + \vec{b} = \vec{0}$.
- Với hai điểm A, B, ta có: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \vec{0}$.

Cho hai điểm A, B. Khi đó, hai vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{BA}$ là hai vectơ đối nhau, tức là $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$.

Ví dụ 4 Cho I là trung điểm của đoạn thẳng AB. Chứng tỏ $\overrightarrow{IA}$ và $\overrightarrow{IB}$ là hai vectơ đối nhau. Viết đẳng thức liên hệ giữa hai vectơ đó.

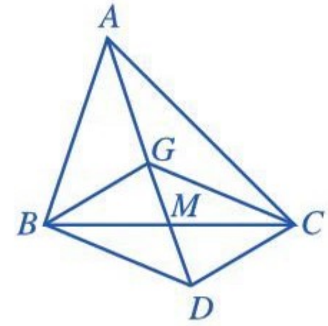
Giải

Hai vectơ $\overrightarrow{IA}, \overrightarrow{IB}$ là hai vectơ đối nhau vì chúng ngược hướng và cùng độ dài, $\overrightarrow{IA} = -\overrightarrow{IB}$, $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$.

Chú ý: I là trung điểm của đoạn thẳng AB khi và chỉ khi $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$.

Ví dụ 5 Cho tam giác ABC có trọng tâm G. Gọi M là trung điểm của BC và D là điểm đối xứng với G qua M (*Hình 55*). Chứng minh:

a) $\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{GD}$; b) $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$.



Hình 55

Giải

a) Vì tứ giác $BGCD$ có hai đường chéo cắt nhau tại trung điểm mỗi đường nên tứ giác $BGCD$ là hình bình hành. Suy ra $\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{GD}$.

b) Vì hai điểm A, D cùng thuộc đường thẳng GM nên các điểm A, G, M, D thẳng hàng.

Ta có: $GA = GD$. Suy ra G là trung điểm của AD.

Vì thế $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$. Vậy $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$.

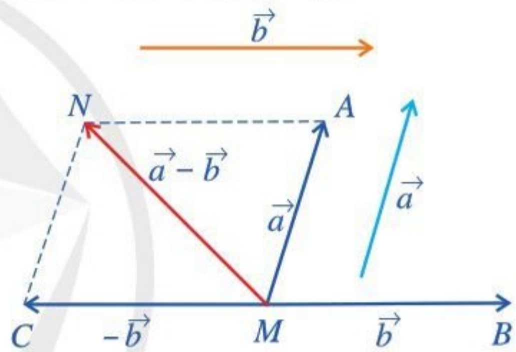
Chú ý: G là trọng tâm của tam giác ABC khi và chỉ khi $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$.

2. Hiệu của hai vectơ

5 Cho hai vectơ $\vec{a}, \vec{b}$. Lấy một điểm M tuỳ ý.

a) Vẽ $\overrightarrow{MA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{MB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{MC} = -\vec{b}$ (*Hình 56*).

b) Tổng của hai vectơ $\vec{a}$ và $(-\vec{b})$ bằng vectơ nào?



Hình 56

Hiệu của vectơ $\vec{a}$ và vectơ $\vec{b}$ là tổng của vectơ $\vec{a}$ và vectơ đối của vectơ $\vec{b}$, kí hiệu là $\vec{a} - \vec{b}$.

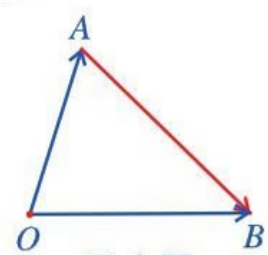
Phép lấy hiệu của hai vectơ còn được gọi là *phép trừ vectơ*.

Ví dụ 6 Cho ba điểm A, B, O (*Hình 57*). Vectơ $\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$ là vectơ nào?

Giải

Ta có: $\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OB} + (-\overrightarrow{OA}) = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{AO} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{AB}$.

Nhận xét: Với ba điểm bất kì A, B, O ta có: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$.



Hình 57

Ví dụ 7 Cho bốn điểm bất kì A, B, C, D. Chứng minh $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{CB} = \vec{0}$.

Giải

Ta có: $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{CB} = (\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}) + (\overrightarrow{CD} - \overrightarrow{CB})$

$= \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{DD} = \vec{0}$.

4 Cho tam giác ABC có M là trung điểm AC, N là trung điểm BC và $AB = a$. Tính độ dài vectơ $\overrightarrow{CM} - \overrightarrow{NB}$.

BÀI TẬP

1. Cho ba điểm M, N, P. Vectơ $\vec{u} = \overrightarrow{NP} + \overrightarrow{MN}$ bằng vectơ nào sau đây?

A. $\overrightarrow{PN}$. B. $\overrightarrow{PM}$. C. $\overrightarrow{MP}$. D. $\overrightarrow{NM}$.

2. Cho ba điểm D, E, G. Vectơ $\vec{v} = \overrightarrow{DE} + (-\overrightarrow{DG})$ bằng vectơ nào sau đây?

A. $\overrightarrow{EG}$. B. $\overrightarrow{GE}$. C. $\overrightarrow{GD}$. D. $\overrightarrow{ED}$.

3. Cho bốn điểm A, B, C, D. Chứng minh:

a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}$;

b) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DA} = \vec{0}$.

4. Cho hình bình hành $ABCD$, gọi O là giao điểm của AC và BD. Các khẳng định sau đúng hay sai?

a) $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}| = |\overrightarrow{AC}|$;

b) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{CB}$;

c) $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}$.

5. Cho đường tròn tâm O. Giả sử A, B là hai điểm nằm trên đường tròn. Tìm điều kiện cần và đủ để hai vectơ $\overrightarrow{OA}$ và $\overrightarrow{OB}$ đối nhau.

6. Cho $ABCD$ là hình bình hành. Chứng minh $\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MA} = \overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MD}$ với mọi điểm M trong mặt phẳng.

7. Cho hình vuông $ABCD$ có cạnh a. Tính độ dài của các vectơ sau:

a) $\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC}$;

b) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}$;

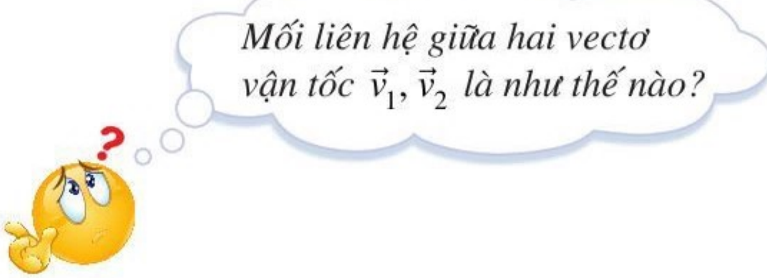
c) $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$ với O là giao điểm của AC và BD.

8. Cho ba lực $\overrightarrow{F_1} = \overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{F_2} = \overrightarrow{OB}$ và $\overrightarrow{F_3} = \overrightarrow{OC}$ cùng tác động vào một vật tại điểm O và vật đứng yên. Cho biết cường độ của $\overrightarrow{F_1}$, $\overrightarrow{F_2}$ đều là 120 N và $\widehat{AOB} = 120^\circ$. Tìm cường độ và hướng của lực $\overrightarrow{F_3}$.

9. Một dòng sông chảy từ phía bắc xuống phía nam với vận tốc là 10 km/h. Một chiếc ca nô chuyển động từ phía đông sang phía tây với vận tốc 40 km/h so với mặt nước. Tìm vận tốc của ca nô so với bờ sông.

§5 TÍCH CỦA MỘT SỐ VỚI MỘT VECTƠ

Hình 58 minh hoạ hai đoàn tàu chạy song song với vectơ vận tốc lần lượt là $\vec{v}_1, \vec{v}_2$.

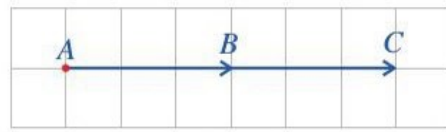


(*Nguồn: https://pixabay.com*)

Hình 58

I. ĐỊNH NGHĨA

Cho B là trung điểm của đoạn thẳng AC. Quan sát *Hình 59* và thực hiện các hoạt động sau:



Hình 59

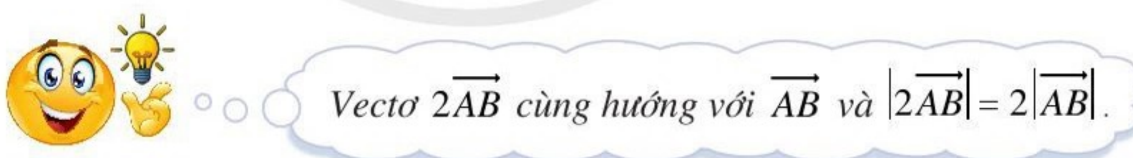
1 Chứng tỏ rằng $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB}$.

Để chứng tỏ đẳng thức trên, ta làm như sau: $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB}$.

Tương tự cách viết tổng $a + a$ ở dạng $2a$ ($a \in \mathbb{R}$), ta có thể viết tổng $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB}$ ở dạng $2\overrightarrow{AB}$.

Vectơ $2\overrightarrow{AB}$ gọi là *tích của số 2 với vectơ* $\overrightarrow{AB}$. Do đó tích của số 2 với vectơ $\overrightarrow{AB}$ là vectơ $\overrightarrow{AC}$.

2 Quan sát vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$, nêu mối liên hệ về hướng và độ dài của vectơ $2\overrightarrow{AB}$ với $\overrightarrow{AB}$.



Một cách tổng quát, ta có:

Cho số thực $k \neq 0$ và vectơ $\vec{a} \neq \vec{0}$. Tích của số k với vectơ $\vec{a}$ là một vectơ, kí hiệu là $k\vec{a}$, được xác định như sau:

- Cùng hướng với vectơ $\vec{a}$ nếu $k > 0$, ngược hướng với vectơ $\vec{a}$ nếu $k < 0$;
- Có độ dài bằng $|k| \cdot |\vec{a}|$.

Quy ước: $0\vec{a} = \vec{0}$, $k\vec{0} = \vec{0}$.

Phép lấy tích của một số với một vectơ gọi là *phép nhân một số với một vectơ*.

Ví dụ 1 Cho B là trung điểm của đoạn thẳng AC. Tìm số k trong mỗi trường hợp sau:

a) $\overrightarrow{CA} = k\overrightarrow{CB}$; b) $\overrightarrow{CA} = k\overrightarrow{AB}$.

Giải

a) Ta có: $\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{CB}$ là hai vectơ cùng hướng và

$$|\overrightarrow{CA}| = 2|\overrightarrow{CB}|.$$

Suy ra $\overrightarrow{CA} = 2\overrightarrow{CB}$. Vậy $k = 2$.

b) Ta có: $\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{AB}$ là hai vectơ ngược hướng và $|\overrightarrow{CA}| = 2|\overrightarrow{AB}|$.

Suy ra $\overrightarrow{CA} = -2\overrightarrow{AB}$. Vậy $k = -2$.

1 Cho tam giác ABC. Hai đường trung tuyến AM và BN cắt nhau tại G.

Tìm các số a, b biết:
$\overrightarrow{AG} = a\overrightarrow{AM}$; $\overrightarrow{GN} = b\overrightarrow{GB}$.

Ví dụ 2 Vật thứ nhất chuyển động thẳng đều từ A đến B với tốc độ là 9 m/s và vật thứ hai chuyển động thẳng đều từ B đến A với tốc độ là 6 m/s. Gọi $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ lần lượt là các vectơ vận tốc của vật thứ nhất và vật thứ hai. Có hay không số thực k thoả mãn $\vec{v}_1 = k\vec{v}_2$?

Giải

Do tỉ số tốc độ của vật thứ nhất và vật thứ hai là $\frac{9}{6} = \frac{3}{2}$ đồng thời hai vật chuyển động ngược hướng nên hai vectơ vận tốc ngược hướng. Suy ra $\vec{v}_1 = \frac{-3}{2}\vec{v}_2$. Vậy $k = \frac{-3}{2}$.

II. TÍNH CHẤT

Với hai vectơ bất kì $\vec{a}$, $\vec{b}$ và hai số thực h, k, ta có:

- $k(\vec{a} + \vec{b}) = k\vec{a} + k\vec{b}$; $k(\vec{a} - \vec{b}) = k\vec{a} - k\vec{b}$;
- $(h + k)\vec{a} = h\vec{a} + k\vec{a}$;
- $h(k\vec{a}) = (hk)\vec{a}$;
- $1\vec{a} = \vec{a}$; $(-1)\vec{a} = -\vec{a}$.

Nhận xét: $k\vec{a} = \vec{0}$ khi và chỉ khi $k = 0$ hoặc $\vec{a} = \vec{0}$.

Ví dụ 3 Cho ba điểm A, B, C. Chứng minh:

a) $2\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{AC}$;

b) $3(5\overrightarrow{AC}) + \overrightarrow{CB} - 14\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}$.

2 Cho ba điểm A, B, C. Chứng minh

$3(\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{BC}) - 2(\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{BC})$
$= \overrightarrow{AB}$.

Giải

a) Ta có: $2\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{BC} = 2(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) = 2\overrightarrow{AC}$.

b) Ta có: $3(5\overrightarrow{AC}) + \overrightarrow{CB} - 14\overrightarrow{AC} = 15\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} - 14\overrightarrow{AC}$

$= 15\overrightarrow{AC} - 14\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AB}$.

III. MỘT SỐ ỨNG DỤNG

1. Trung điểm của đoạn thẳng

3 Cho I là trung điểm của đoạn thẳng AB và điểm M tuỳ ý. Chứng minh rằng $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MI}$.

Để chứng minh đẳng thức trên, ta làm như sau:

$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}) + (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}) = 2\overrightarrow{MI} + (\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB}) = 2\overrightarrow{MI} + \vec{0} = 2\overrightarrow{MI}$.

Nếu I là trung điểm của đoạn thẳng AB thì $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MI}$ với điểm M bất kì.

2. Trọng tâm của tam giác

4 Cho G là trọng tâm của tam giác ABC và điểm M tuỳ ý. Chứng minh rằng $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG}$.

Để chứng minh đẳng thức trên, ta làm như sau:

$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA}) + (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GB}) + (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GC})$

$= 3\overrightarrow{MG} + (\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}) = 3\overrightarrow{MG} + \vec{0} = 3\overrightarrow{MG}$.

Nếu G là trọng tâm của tam giác ABC thì $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG}$ với điểm M bất kì.

Ví dụ 4 Cho tứ giác $ABCD$ có M, N lần lượt là trung điểm của hai cạnh AB và CD. Gọi G là trung điểm của đoạn thẳng MN.

Chứng minh $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$.

Giải

Vì M là trung điểm của AB nên $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} = 2\overrightarrow{GM}$.

Vì N là trung điểm của CD nên $\overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = 2\overrightarrow{GN}$.

Suy ra $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = 2\overrightarrow{GM} + 2\overrightarrow{GN} = 2(\overrightarrow{GM} + \overrightarrow{GN}) = 2\vec{0} = \vec{0}$.

3 Cho tam giác ABC có G là trọng tâm. Chứng minh

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = 3\overrightarrow{AG}$.

3. Điều kiện để hai vectơ cùng phương. Điều kiện để ba điểm thẳng hàng

5 Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ khác $\vec{0}$ sao cho $\vec{a} = k\vec{b}$ với k là số thực khác 0. Nêu nhận xét về phương của hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$.

Điều kiện cần và đủ để hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ $(\vec{b} \neq \vec{0})$ cùng phương là có một số thực k để $\vec{a} = k\vec{b}$.

6 Cho ba điểm phân biệt A, B, C.

a) Nếu ba điểm A, B, C thẳng hàng thì hai vectơ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ có cùng phương hay không?

b) Ngược lại, nếu hai vectơ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ cùng phương thì ba điểm A, B, C có thẳng hàng hay không?

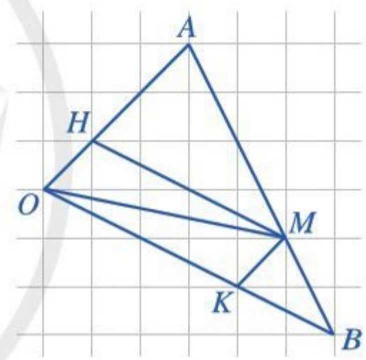
Điều kiện cần và đủ để ba điểm phân biệt A, B, C thẳng hàng là có số thực k để $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}$.

Ví dụ 5 Cho tam giác OAB. Điểm M thuộc cạnh AB sao cho $AM = \frac{2}{3}AB$. Kẻ MH // OB, MK // OA (*Hình 60*).

Giả sử $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$.

a) Biểu thị $\overrightarrow{OH}$ theo $\vec{a}$ và $\overrightarrow{OK}$ theo $\vec{b}$.

b) Biểu thị $\overrightarrow{OM}$ theo $\vec{a}$ và $\vec{b}$.



Hình 60

Giải

a) Ta có: MK // OA, MH // OB suy ra

$$\frac{OK}{OB} = \frac{AM}{AB} = \frac{2}{3}, \quad \frac{OH}{OA} = \frac{BM}{AB} = \frac{1}{3}.$$

Vì $\overrightarrow{OH}$ và $\overrightarrow{OA}$ cùng hướng và $OH = \frac{1}{3}OA$ nên

$$\overrightarrow{OH} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OA} = \frac{1}{3}\vec{a}.$$

Vì $\overrightarrow{OK}$ và $\overrightarrow{OB}$ cùng hướng và $OK = \frac{2}{3}OB$ nên

$$\overrightarrow{OK} = \frac{2}{3}\overrightarrow{OB} = \frac{2}{3}\vec{b}.$$

b) Vì tứ giác $OHMK$ là hình bình hành nên

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OH} + \overrightarrow{OK} = \frac{1}{3}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b}.$$

4 Ở *Hình 61*, tìm k trong mỗi trường hợp sau:

a) $\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AD}$;

b) $\overrightarrow{BD} = k\overrightarrow{DC}$.

Hình 61

Nhận xét: Trong mặt phẳng, cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ không cùng phương. Với mỗi vectơ $\vec{c}$ có duy nhất cặp số $(x ; y)$ thoả mãn $\vec{c} = x\vec{a} + y\vec{b}$.

BÀI TẬP

1. Cho hình thang $MNPQ$, $MN // PQ$, $MN = 2PQ$. Phát biểu nào sau đây là đúng?

A. $\overrightarrow{MN} = 2\overrightarrow{PQ}$. B. $\overrightarrow{MQ} = 2\overrightarrow{NP}$. C. $\overrightarrow{MN} = -2\overrightarrow{PQ}$. D. $\overrightarrow{MQ} = -2\overrightarrow{NP}$.

2. Cho đoạn thẳng $AB = 6$ cm.

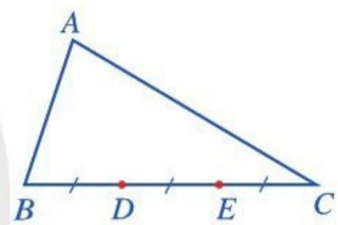
a) Xác định điểm C thoả mãn $\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.

b) Xác định điểm D thoả mãn $\overrightarrow{AD} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.

3. Cho tam giác ABC có M, N, P lần lượt là trung điểm của BC, CA, AB. Chứng minh:

a) $\overrightarrow{AP} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AN}$; b) $\overrightarrow{BC} + 2\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{BA}$.

4. Cho tam giác ABC. Các điểm D, E thuộc cạnh BC thoả mãn $BD = DE = EC$ (*Hình 62*). Giả sử $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{b}$. Biểu diễn các vectơ $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{BE}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AE}$ theo $\vec{a}$, $\vec{b}$.



Hình 62

5. Cho tứ giác $ABCD$ có M, N lần lượt là trung điểm của hai cạnh AB và CD. Gọi G là trung điểm của đoạn thẳng MN, E là trọng tâm tam giác BCD. Chứng minh:

a) $\overrightarrow{EA} + \overrightarrow{EB} + \overrightarrow{EC} + \overrightarrow{ED} = 4\overrightarrow{EG}$;

b) $\overrightarrow{EA} = 4\overrightarrow{EG}$;

c) Điểm G thuộc đoạn thẳng AE và $\overrightarrow{AG} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AE}$.

6. Cho hình bình hành $ABCD$. Đặt $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$. Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC. Biểu thị các vectơ $\overrightarrow{AG}$, $\overrightarrow{CG}$ theo hai vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$.

7. Cho tam giác ABC. Các điểm D, E, H thoả mãn

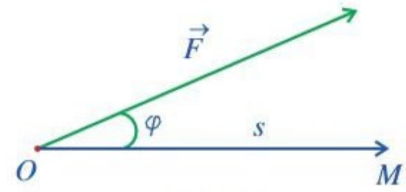
$$\overrightarrow{DB} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC},\ \overrightarrow{AE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC},\ \overrightarrow{AH} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}.$$

a) Biểu thị mỗi vectơ $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{DH}$, $\overrightarrow{HE}$ theo hai vectơ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$.

b) Chứng minh D, E, H thẳng hàng.

§6 TÍCH VÔ HƯỚNG CỦA HAI VECTƠ

Trong vật lí, nếu có một lực $\vec{F}$ tác động lên một vật tại điểm O và làm cho vật đó di chuyển một quãng đường $s = OM$ (*Hình 63*) thì công A của lực $\vec{F}$ được tính theo công thức $A = |\vec{F}| . |\overrightarrow{OM}| . \cos\varphi$ trong đó $|\vec{F}|$ gọi là cường độ của lực $\vec{F}$ tính bằng Newton (N), $|\overrightarrow{OM}|$ là độ dài của vectơ $\overrightarrow{OM}$ tính bằng mét (m), φ là góc giữa hai vectơ $\overrightarrow{OM}$ và $\vec{F}$, còn công A tính bằng Jun (J).



Hình 63

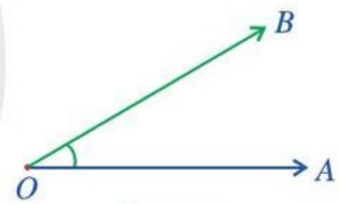
Trong toán học, giá trị của biểu thức $A = |\vec{F}| . |\overrightarrow{OM}| . \cos\varphi$ *(không kể đơn vị đo) được gọi là gì?*

I. ĐỊNH NGHĨA

1. Tích vô hướng của hai vectơ có cùng điểm đầu

Trong mặt phẳng, cho hai vectơ $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}$ khác $\vec{0}$ (*Hình 64*).

- Góc giữa hai vectơ $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}$ là góc giữa hai tia OA, OB và được kí hiệu là $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$.
- Tích vô hướng của hai vectơ $\overrightarrow{OA}$ và $\overrightarrow{OB}$ là một số thực, kí hiệu $\overrightarrow{OA} . \overrightarrow{OB}$, được xác định bởi công thức: $\overrightarrow{OA} . \overrightarrow{OB} = |\overrightarrow{OA}| . |\overrightarrow{OB}| . \cos(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$.



Hình 64

Ví dụ 1 Cho tam giác ABC vuông cân tại A và $AB = 4$ cm.

a) Tính độ dài cạnh huyền BC.

b) Tính $\overrightarrow{AB} . \overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{BA} . \overrightarrow{BC}$.

Giải

a) $BC = AB\sqrt{2} = 4\sqrt{2}$ (cm).

b) $\overrightarrow{AB} . \overrightarrow{AC} = |\overrightarrow{AB}| . |\overrightarrow{AC}| . \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = 4 . 4 . \cos\widehat{BAC} = 16 . \cos 90^\circ = 16 . 0 = 0.$

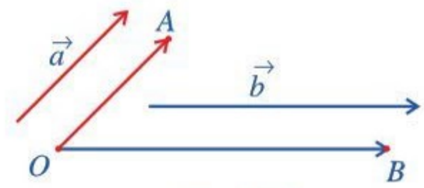
$$\overrightarrow{BA} . \overrightarrow{BC} = |\overrightarrow{BA}| . |\overrightarrow{BC}| . \cos(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}) = 4 . 4\sqrt{2} . \cos\widehat{ABC} = 16\sqrt{2} . \cos 45^\circ$$

$$= 16\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 16.$$

1 Cho tam giác ABC vuông tại A có $\widehat{B} = 30^\circ$, $AB = 3$ cm. Tính $\overrightarrow{BA} . \overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{CA} . \overrightarrow{CB}$.

2. Tích vô hướng của hai vectơ tuỳ ý

Cho hai vectơ $\vec{a}, \vec{b}$ khác $\vec{0}$. Lấy một điểm O và vẽ vectơ $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ (*Hình 65*).



Hình 65

- Góc giữa hai vectơ $\vec{a}, \vec{b}$, kí hiệu $(\vec{a}, \vec{b})$, là góc giữa hai vectơ $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}$.
- Tích vô hướng của hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$, kí hiệu $\vec{a} \cdot \vec{b}$, là tích vô hướng của hai vectơ $\overrightarrow{OA}$ và $\overrightarrow{OB}$. Như vậy, tích vô hướng của hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là một số thực được xác định bởi công thức: $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a}, \vec{b})$.

Quy ước: Tích vô hướng của một vectơ bất kì với vectơ $\vec{0}$ là số 0.

Chú ý

- $(\vec{a}, \vec{b}) = (\vec{b}, \vec{a})$.
- Nếu $(\vec{a}, \vec{b}) = 90^{\circ}$ thì ta nói hai vectơ $\vec{a}, \vec{b}$ vuông góc với nhau, kí hiệu $\vec{a} \perp \vec{b}$ hoặc $\vec{b} \perp \vec{a}$. Khi đó $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos 90^{\circ} = 0$.
- Tích vô hướng của hai vectơ cùng hướng bằng tích hai độ dài của chúng.
- Tích vô hướng của hai vectơ ngược hướng bằng số đối của tích hai độ dài của chúng.

Ta có thể chứng minh chú ý thứ ba như sau:

Nếu $\vec{a}, \vec{b}$ là hai vectơ (khác $\vec{0}$) cùng hướng thì $(\vec{a}, \vec{b}) = 0^{\circ}$. Do đó, $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = 1$. Vì vậy, $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a}, \vec{b}) = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$.

Nếu một trong hai vectơ $\vec{a}, \vec{b}$ là vectơ $\vec{0}$ thì $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ và $|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| = 0$ nên $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$.

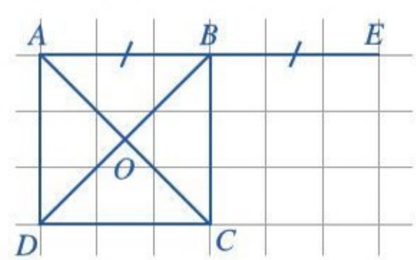
Chú ý thứ tư được chứng minh tương tự như trên.

Ví dụ 2 Cho hình vuông $ABCD$ tâm O có độ dài cạnh bằng a. Tính:

a) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{OC}$; b) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BD}$; c) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{OD}$.

Giải. (*Hình 66*)

a) Ta có: $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{OC}) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AO}) = \widehat{BAO} = 45^{\circ}$.



Hình 66

Vậy $\overrightarrow{AB} \,.\, \overrightarrow{OC} = \left|\overrightarrow{AB}\right| . \left|\overrightarrow{OC}\right| . \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{OC})$

$$= a \cdot \frac{a}{\sqrt{2}} \cdot \cos 45^{\circ} = \frac{a^2}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{a^2}{2}.$$

b) Vẽ vectơ $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{AB}$. Ta có:

$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BD}) = (\overrightarrow{BE}, \overrightarrow{BD}) = \widehat{EBD} = 135^{\circ}$.

Vậy $\overrightarrow{AB} \,.\, \overrightarrow{BD} = \left|\overrightarrow{AB}\right| . \left|\overrightarrow{BD}\right| . \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BD})$

$$= a \,.\, a\sqrt{2} \,.\, \cos 135^{\circ} = a^2\sqrt{2} \cdot \frac{-\sqrt{2}}{2} = -a^2.$$

c) Vì $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BE}, \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{BO}$ nên $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{OD}) = (\overrightarrow{BE}, \overrightarrow{BO}) = \widehat{EBO} = 135^{\circ}$.

Vậy $\overrightarrow{AB} \,.\, \overrightarrow{OD} = \left|\overrightarrow{AB}\right| . \left|\overrightarrow{OD}\right| . \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{OD}) = a \cdot \frac{a}{\sqrt{2}} \cdot \cos 135^{\circ} = \frac{a^2}{\sqrt{2}} \cdot \frac{-\sqrt{2}}{2} = \frac{-a^2}{2}.$

2 Cho tam giác ABC đều cạnh a, AH là đường cao. Tính:

a) $\overrightarrow{CB} \,.\, \overrightarrow{BA}$;

b) $\overrightarrow{AH} \,.\, \overrightarrow{BC}$.

II. TÍNH CHẤT

Với hai vectơ bất kì $\vec{a}, \vec{b}$ và số thực k tuỳ ý, ta có:

- $\vec{a} \,.\, \vec{b} = \vec{b} \,.\, \vec{a}$ (tính chất giao hoán);
- $\vec{a} \,.\, (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \,.\, \vec{b} + \vec{a} \,.\, \vec{c}$ (tính chất phân phối);
- $(k\vec{a}) \,.\, \vec{b} = k(\vec{a} \,.\, \vec{b}) = \vec{a} \,.\, (k\vec{b})$;
- $\vec{a}^2 \geq 0, \vec{a}^2 = 0 \Leftrightarrow \vec{a} = \vec{0}$.

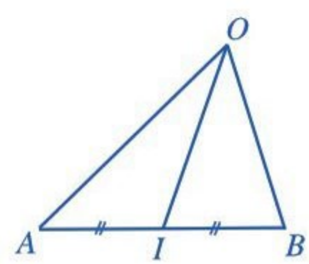
Trong đó, kí hiệu $\vec{a} \,.\, \vec{a} = \vec{a}^2$ và biểu thức này được gọi là bình phương vô hướng của vectơ $\vec{a}$.

Ví dụ 3 Cho đoạn thẳng AB và I là trung điểm của AB. Chứng minh rằng với mỗi điểm O ta có:

a) $\overrightarrow{OI} \,.\, \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{OI} \,.\, \overrightarrow{IB} = 0$;

b) $\overrightarrow{OI} \,.\, \overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OB}^2 - \overrightarrow{OA}^2)$.

Giải. (*Hình 67*)



Hình 67

a) Vì I là trung điểm AB nên $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$.

Vậy $\overrightarrow{OI} \,.\, \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{OI} \,.\, \overrightarrow{IB} = \overrightarrow{OI} \,.\, (\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB}) = \overrightarrow{OI} \,.\, \vec{0} = 0$.

b) Vì I là trung điểm AB nên $2\overrightarrow{OI} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OA} \Leftrightarrow \overrightarrow{OI} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OA})$.

Vậy $\overrightarrow{OI} \,.\, \overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OA}) \,.\, (\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OA}) \,.\, \overrightarrow{OB} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OA}) \,.\, (-\overrightarrow{OA})$

$$= \frac{1}{2}\overrightarrow{OB} \,.\, \overrightarrow{OB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OA} \,.\, \overrightarrow{OB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{OB} \,.\, \overrightarrow{OA} - \frac{1}{2}\overrightarrow{OA} \,.\, \overrightarrow{OA} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OB}^2 - \overrightarrow{OA}^2).$$

Ví dụ 4 Cho tam giác ABC vuông tại A. Tính:

$$\overrightarrow{AB} \,.\, \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB} \,.\, \overrightarrow{BC}.$$

Giải

$$\overrightarrow{AB} \,.\, \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB} \,.\, \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} \,.\, (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC})$$
$$= \overrightarrow{AB} \,.\, \overrightarrow{AC} = 0$$

(Do $\overrightarrow{AB}$ vuông góc với $\overrightarrow{AC}$).

3 Chứng minh rằng với hai vectơ bất kì $\vec{a}$, $\vec{b}$, ta có:

$(\vec{a} + \vec{b})^2 = \vec{a}^2 + 2\vec{a} \,.\, \vec{b} + \vec{b}^2$;

$(\vec{a} - \vec{b})^2 = \vec{a}^2 - 2\vec{a} \,.\, \vec{b} + \vec{b}^2$;

$(\vec{a} - \vec{b}) \,.\, (\vec{a} + \vec{b}) = \vec{a}^2 - \vec{b}^2$.

III. MỘT SỐ ỨNG DỤNG

1. Tính độ dài của đoạn thẳng

Nhận xét

Với hai điểm A, B phân biệt, ta có: $\overrightarrow{AB}^2 = |\overrightarrow{AB}|^2$.

Do đó độ dài đoạn thẳng AB được tính như sau: $AB = \sqrt{\overrightarrow{AB}^2}$.

Ví dụ 5 (Định lí côsin trong tam giác)

Chứng minh rằng trong tam giác ABC, ta có:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \,.\, AC \,.\, \cos A.$$

Giải

Ta có: $\overrightarrow{BC}^2 = (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB})^2 = \overrightarrow{AC}^2 + \overrightarrow{AB}^2 - 2\overrightarrow{AC} \,.\, \overrightarrow{AB}$

Suy ra: $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \,.\, AC \,.\, \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$.

$= AB^2 + AC^2 - 2AB \,.\, AC \,.\, \cos A$.

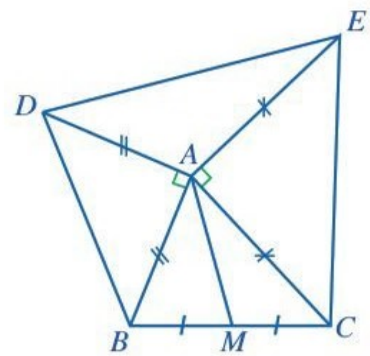
4 Sử dụng tích vô hướng, chứng minh định lí Pythagore: Tam giác ABC vuông tại A khi và chỉ khi $BC^2 = AB^2 + AC^2$.

2. Chứng minh hai đường thẳng vuông góc

Nhận xét: Cho hai vectơ bất kì $\vec{a}$ và $\vec{b}$ khác vectơ $\vec{0}$. Ta có: $\vec{a} \,.\, \vec{b} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$.

Hai đường thẳng AB và CD vuông góc với nhau khi và chỉ khi $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = 0$.

Cũng như vậy, hai đường đường thẳng a và b vuông góc khi và chỉ khi $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$, trong đó $\vec{u} \neq \vec{0}, \vec{v} \neq \vec{0}$, giá của vectơ $\vec{u}$ song song hoặc trùng với đường thẳng a và giá của vectơ $\vec{v}$ song song hoặc trùng với đường thẳng b.



Hình 68

Ví dụ 6 Cho tam giác ABC có $AB = 3$, $AC = 4$, $\widehat{A} = 60^\circ$. Gọi M là trung điểm của BC. Về phía ngoài tam giác vẽ các tam giác vuông cân tại A là ABD và ACE (*Hình 68*).

a) Tính các tích vô hướng $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AE}$, $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD}$.

b) Biểu diễn $\overrightarrow{AM}$ theo $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$. Từ đó chứng minh $AM \perp DE$.

Giải

a) Do $\widehat{BAE} = \widehat{BAC} + \widehat{CAE} = 150^\circ$, $\widehat{CAD} = \widehat{CAB} + \widehat{BAD} = 150^\circ$ nên

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AE} = AB \cdot AE \cdot \cos\widehat{BAE} = 3 \cdot 4 \cdot \cos 150^\circ = 12 \cdot \frac{-\sqrt{3}}{2} = -6\sqrt{3};$$

$$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD} = AC \cdot AD \cdot \cos\widehat{CAD} = 4 \cdot 3 \cdot \cos 150^\circ = 12 \cdot \frac{-\sqrt{3}}{2} = -6\sqrt{3}.$$

b) Ta có:

$$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}),\ \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AD}.$$

$$\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{DE} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) \cdot (\overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AD})$$

$$= \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD}).$$

Vì $AB \perp AD, AC \perp AE$ nên $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = 0, \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AE} = 0$.

Suy ra $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{DE} = \frac{1}{2}(-6\sqrt{3} + 0 - 0 + 6\sqrt{3}) = 0$. Vậy $AM \perp DE$.

BÀI TẬP

1. Nếu hai điểm M, N thoả mãn $\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{NM} = -4$ thì độ dài đoạn thẳng MN bằng bao nhiêu?

A. $MN = 4$. B. $MN = 2$. C. $MN = 16$. D. $MN = 256$.

2. Phát biểu nào sau đây là đúng?

A. Nếu $\vec{a}$, $\vec{b}$ khác $\vec{0}$ và $(\vec{a}, \vec{b}) < 90^{\circ}$ thì $\vec{a}.\vec{b} < 0$.

B. Nếu $\vec{a}$, $\vec{b}$ khác $\vec{0}$ và $(\vec{a}, \vec{b}) > 90^{\circ}$ thì $\vec{a}.\vec{b} > 0$.

C. Nếu $\vec{a}$, $\vec{b}$ khác $\vec{0}$ và $(\vec{a}, \vec{b}) < 90^{\circ}$ thì $\vec{a}.\vec{b} > 0$.

D. Nếu $\vec{a}$, $\vec{b}$ khác $\vec{0}$ và $(\vec{a}, \vec{b}) \neq 90^{\circ}$ thì $\vec{a}.\vec{b} < 0$.

3. Tính $\vec{a}.\vec{b}$ trong mỗi trường hợp sau:

a) $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 4$, $(\vec{a}, \vec{b}) = 30^{\circ}$;

b) $|\vec{a}| = 5$, $|\vec{b}| = 6$, $(\vec{a}, \vec{b}) = 120^{\circ}$;

c) $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 3$, $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng hướng;

d) $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 3$, $\vec{a}$ và $\vec{b}$ ngược hướng.

4. Cho hình vuông *ABCD* cạnh *a*. Tính các tích vô hướng sau:

a) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$; b) $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BD}$.

5. Cho tam giác *ABC*. Chứng minh:

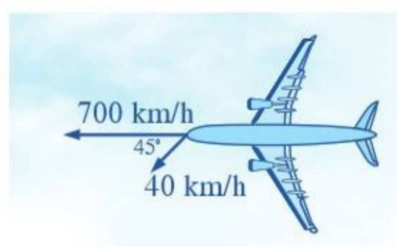
$$AB^2 + \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CA} = 0.$$

6. Cho tam giác nhọn *ABC*, kẻ đường cao *AH*. Chứng minh rằng:

a) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AH}$;

b) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{HB}.\overrightarrow{BC}$.

7. Một máy bay đang bay từ hướng đông sang hướng tây với tốc độ 700 km/h thì gặp luồng gió thổi từ hướng đông bắc sang hướng tây nam với tốc độ 40 km/h (*Hình 69*). Máy bay bị thay đổi vận tốc sau khi gặp gió thổi. Tìm tốc độ mới của máy bay theo đơn vị km/h (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).



Hình 69

8. Cho tam giác *ABC* có $AB = 2$, $AC = 3$, $\widehat{BAC} = 60^{\circ}$. Gọi *M* là trung điểm của đoạn thẳng *BC*. Điểm *D* thoả mãn $\overrightarrow{AD} = \frac{7}{12}\overrightarrow{AC}$.

a) Tính $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$.

b) Biểu diễn $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{BD}$ theo $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$.

c) Chứng minh $AM \perp BD$.

BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG IV

1. Cho tam giác ABC có $AB = 3$, $AC = 4$, $\widehat{BAC} = 120^{\circ}$. Tính (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị):

a) Độ dài cạnh BC và độ lớn góc B;

b) Bán kính đường tròn ngoại tiếp;

c) Diện tích của tam giác;

d) Độ dài đường cao xuất phát từ A;

e) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BC}$ với M là trung điểm của BC.

2. Không dùng máy tính cầm tay, hãy tính giá trị của các biểu thức sau:

$A = (\sin 20^{\circ} + \sin 70^{\circ})^2 + (\cos 20^{\circ} + \cos 110^{\circ})^2$,

$B = \tan 20^{\circ} + \cot 20^{\circ} + \tan 110^{\circ} + \cot 110^{\circ}$.

3. Không dùng thước đo góc, làm thế nào để biết số đo góc đó.

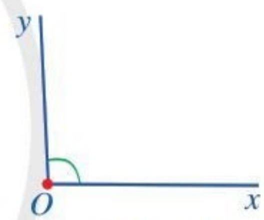
Bạn Hoài vẽ góc xOy và đố bạn Đông làm thế nào có thể biết được số đo của góc này khi không có thước đo góc. Bạn Đông làm như sau:

– Chọn các điểm A, B lần lượt thuộc các tia Ox và Oy sao cho $OA = OB = 2$ cm;

– Đo độ dài đoạn thẳng AB được $AB = 3{,}1$ cm.

Từ các dữ kiện trên bạn Đông tính được $\cos\widehat{xOy}$, từ đó suy ra độ lớn góc xOy.

Em hãy cho biết số đo góc xOy ở *Hình 70* bằng bao nhiêu độ (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).



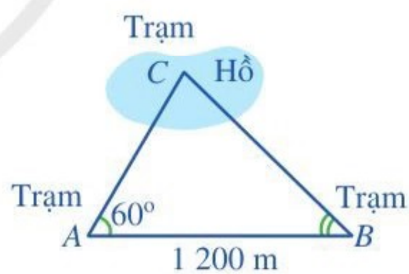
Hình 70

4. Có hai trạm quan sát A và B ven hồ và một trạm quan sát C ở giữa hồ. Để tính khoảng cách từ A và từ B đến C, người ta làm như sau (*Hình 71*):

– Đo góc BAC được 60°, đo góc ABC được 45°;

– Đo khoảng cách AB được 1 200 m.

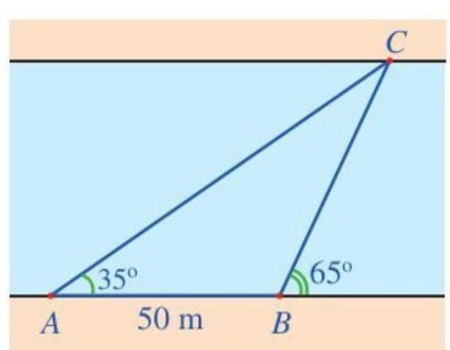
Khoảng cách từ trạm C đến các trạm A và B bằng bao nhiêu mét (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)?



Hình 71

5. Một người đứng ở bờ sông, muốn đo độ rộng của khúc sông chảy qua vị trí đang đứng (khúc sông tương đối thẳng, có thể xem hai bờ song song với nhau).

Từ vị trí đang đứng A, người đó đo được góc nghiêng $\alpha = 35^{\circ}$ so với bờ sông tới một vị trí C quan sát được

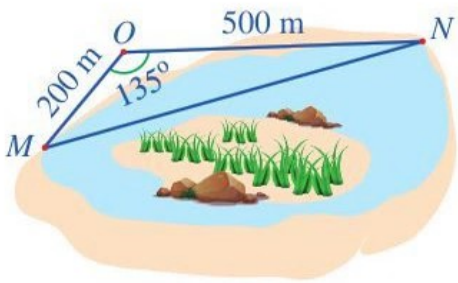


Hình 72

ở phía bờ bên kia. Sau đó di chuyển dọc bờ sông đến vị trí B cách A một khoảng $d = 50$ m và tiếp tục đo được góc nghiêng $\beta = 65^o$ so với bờ bên kia tới vị trí C đã chọn (*Hình 72*). Hỏi độ rộng của khúc sông chảy qua vị trí người đó đang đứng là bao nhiêu mét (làm tròn kết quả đến hàng phần mười)?

6. Để đo khoảng cách giữa hai vị trí M, N ở hai phía ốc đảo, người ta chọn vị trí O bên ngoài ốc đảo sao cho: O không thuộc đường thẳng MN; các khoảng cách OM, ON và góc MON là đo được (*Hình 73*). Sau khi đo, ta có $OM = 200$ m, $ON = 500$ m, $\widehat{MON} = 135^o$.

Khoảng cách giữa hai vị trí M, N là bao nhiêu mét (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)?



Hình 73

7. Chứng minh:

a) Nếu $ABCD$ là hình bình hành thì $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CE} = \overrightarrow{AE}$ với E là điểm bất kì;

b) Nếu I là trung điểm của đoạn thẳng AB thì $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{IN} = 2\overrightarrow{MN}$ với M, N là hai điểm bất kì;

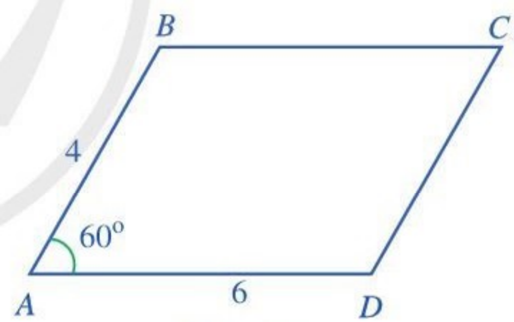
c) Nếu G là trọng tâm của tam giác ABC thì $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} - 3\overrightarrow{MN} = 3\overrightarrow{NG}$ với M, N là hai điểm bất kì.

8. Cho hình bình hành $ABCD$ có $AB = 4$, $AD = 6$, $\widehat{BAD} = 60^o$ (*Hình 74*).

a) Biểu thị các vectơ $\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{AC}$ theo $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$.

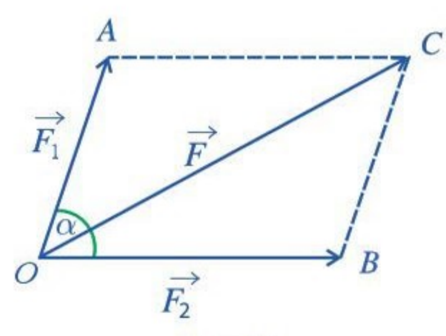
b) Tính các tích vô hướng $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{AC}$.

c) Tính độ dài các đường chéo BD, AC.



Hình 74

9. Hai lực $\overrightarrow{F_1}$, $\overrightarrow{F_2}$ cho trước cùng tác dụng lên một vật tại điểm O và tạo với nhau một góc $(\overrightarrow{F_1}, \overrightarrow{F_2}) = \alpha$ làm cho vật di chuyển theo hướng từ O đến C (*Hình 75*). Lập công thức tính cường độ của hợp lực $\overrightarrow{F}$ làm cho vật di chuyển theo hướng từ O đến C (giả sử chỉ có đúng hai lực $\overrightarrow{F_1}$, $\overrightarrow{F_2}$ làm cho vật di chuyển).



Hình 75

HOẠT ĐỘNG THỰC HÀNH VÀ TRẢI NGHIỆM

CHỦ ĐỀ 1. ĐO GÓC

I. NỘI DUNG CHÍNH CỦA CHỦ ĐỀ

1. Những hình ảnh về góc trong cuộc sống

1 Quan sát những hình ảnh về góc trong một số tình huống sau đây và nêu cách xác định những góc đó.

***a) Tình huống 1**: Góc sút*

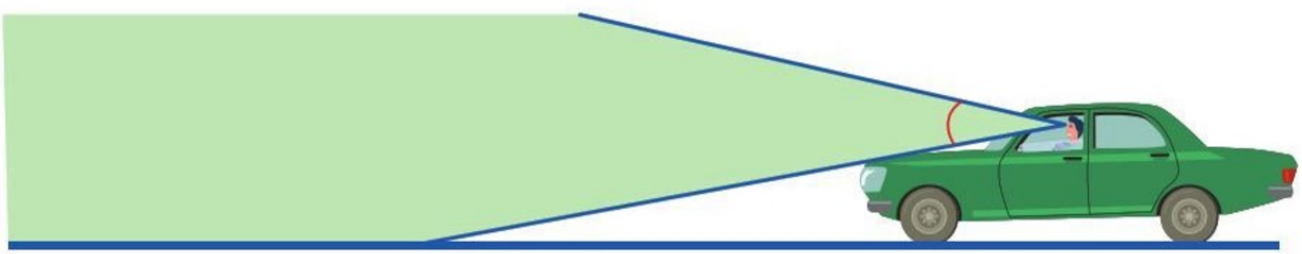
Trong bóng đá, khi cầu thủ đá phạt, "góc sút" được hiểu là góc tạo bởi hai tia có gốc là điểm đặt bóng, lần lượt nối gốc với hai chân của khung thành (*Hình 1*).

(*Nguồn: https://shutterstock.com*)

Hình 1. Đá phạt trong bóng đá

***b) Tình huống 2**: Góc nhìn*

Khi lái xe, góc nhìn của tài xế giới hạn bởi hai tia (*Hình 2*):



Hình 2. Góc nhìn khi lái xe

Góc nhìn (vùng được tô màu) diễn tả vùng ta quan sát được. Vì ta không thể trông thấy các vật ở ngoài góc nhìn nên vùng không tô màu được gọi là *vùng mù* (hay vùng các điểm mù). Góc nhìn càng lớn ta càng thấy nhiều sự vật hơn và càng lái xe an toàn hơn.

2. Tìm kiếm những hình ảnh về góc trong thực tiễn

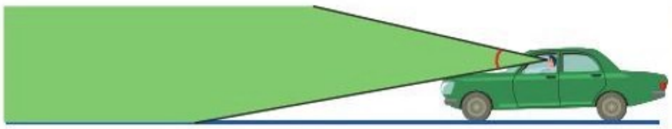
Em hãy tìm thêm những hình ảnh về góc trong thực tiễn.

3. Ý nghĩa và ứng dụng của góc trong thực tiễn

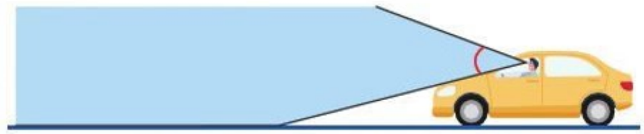
Góc có nhiều ứng dụng trong thực tiễn, đặc biệt trong an toàn giao thông.

***a) Tình huống 1**: Góc nhìn của người lái xe hạng nhỏ*

Hình 3 và *Hình 4* minh hoạ góc nhìn của người lái xe ngồi trên ô tô. Rõ ràng, nếu góc nhìn của xe 2 lớn hơn góc nhìn của xe 1 thì đi xe 2 sẽ an toàn hơn.

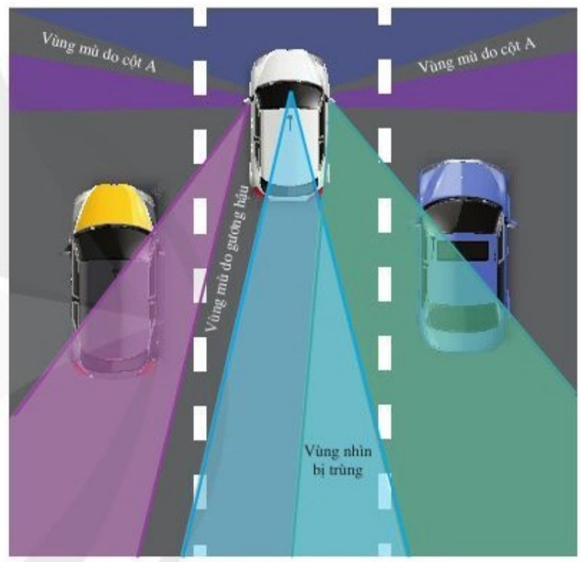


Hình 3. Góc nhìn của xe 1



Hình 4. Góc nhìn của xe 2

Hình 5 cho ta hình ảnh về góc nhìn của người lái xe (bằng mắt thường và thông qua gương chiếu hậu) và vùng mù (màu xám) của người lái xe hạng nhỏ.



Hình 5. Vùng quan sát của người lái xe hạng nhỏ

***b) Tình huống 2**: Góc nhìn của người lái xe tải*

Xe tải khi lưu thông trên đường sẽ không quan sát được các vùng có màu đỏ (*Hình 6*).

Hình 6. Vùng quan sát của người lái xe tải

Xe càng lớn thì vùng mù của người lái xe càng lớn. Do đó, khi tham gia giao thông phải tuyệt đối tránh di chuyển vào vùng mù của người lái xe.

Em hãy tìm thêm những ứng dụng của góc trong thực tiễn.

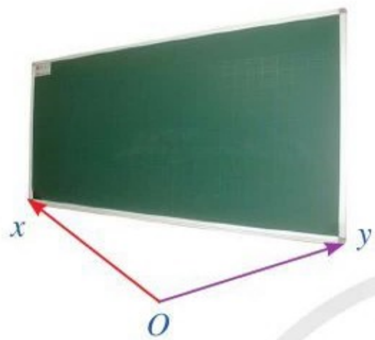
II. GỢI Ý TỔ CHỨC CÁC HOẠT ĐỘNG THỰC HÀNH VÀ TRẢI NGHIỆM

1. Thực hành đo góc trong thực tiễn bằng thước đo góc

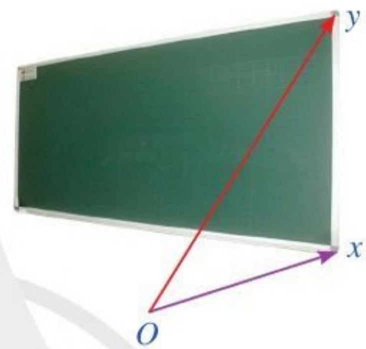
2

***a) Nhiệm vụ**: Tìm số đo góc trong ba tình huống thực tế sau*:

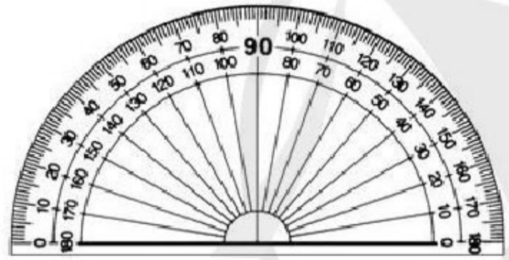
Tình huống 1: Có một chiếc bảng treo trên tường nhưng cạnh đáy dưới của bảng nằm trên mặt sàn lớp học. Tìm số đo của góc trong *Hình 7* và *Hình 8* bằng cách sử dụng thước đo góc 180° (*Hình 9*) hoặc thước đo góc 360° *(Hình 10)*, biết điểm gốc *O* ở trên mặt sàn lớp học.

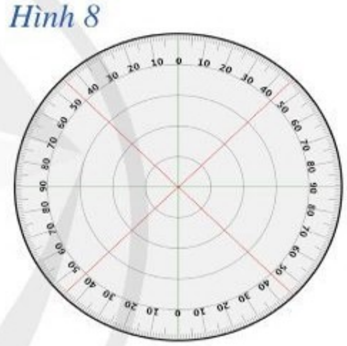


Hình 7



Hình 8


Hình 9


Hình 10

Tình huống 2: Câu hỏi tương tự như trong *Tình huống 1* nhưng chiếc bảng treo trên tường có cạnh đáy dưới song song với mặt sàn lớp học và điểm gốc *O* ở trên mặt sàn lớp học.

Tình huống 3: Câu hỏi tương tự như trong *Tình huống 2* nhưng điểm gốc *O* cách mặt sàn lớp học là 110 cm.

b) Trình bày ý tưởng

Đối với tình huống 1:

– Thước đo góc cần đặt như thế nào để xác định được tia *Ox* của góc *xOy* trong *Hình 7*?

  Sau khi đặt thước đo góc như vậy thì tia *Oy* của góc *xOy* trong *Hình 7* được xác định như thế nào?

– Thước đo góc cần đặt như thế nào để xác định được tia *Ox* của góc *xOy* trong *Hình 8*?

  Sau khi đặt thước đo góc như vậy thì tia *Oy* của góc *xOy* trong *Hình 8* được xác định như thế nào?

Đối với tình huống 2: Các bước thực hiện tương tự như trong *Tình huống 1*.

Đối với tình huống 3: Liên hệ với các bước trong *Tình huống 2* để đưa ra cách đo.

c) Báo cáo kết quả

Trình bày các bước đo góc theo ý tưởng đã nêu.

Hoàn thành bảng thống kê sau với đơn vị đo là độ (sau khi làm tròn đến hàng đơn vị).

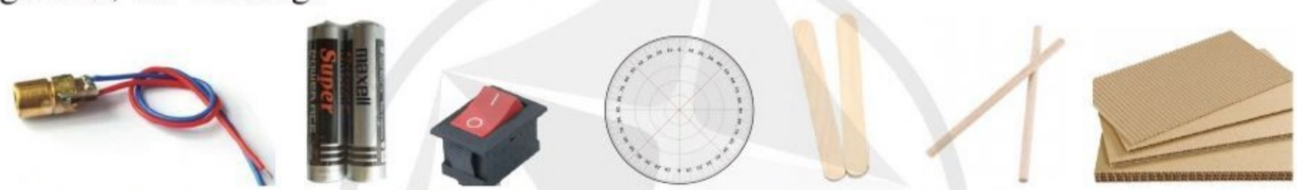
	Độ lớn của góc *xOy* trong *Hình 7*	**Độ lớn của góc *xOy* trong *Hình 8***
Tình huống 1	?	?
Tình huống 2	?	?
Tình huống 3	?	?

2. Tạo dựng và thực hành đo góc bằng dụng cụ có gắn tia chiếu laser

a) Phần chuẩn bị

3 Học sinh được chia theo nhóm. Các nhóm chuẩn bị thiết bị và trao đổi, thảo luận.

- Chuẩn bị (*Hình 11*): đèn chiếu laser, pin, công tắc, thước đo góc 360°, que kem, que gỗ tròn, bìa cát tông.

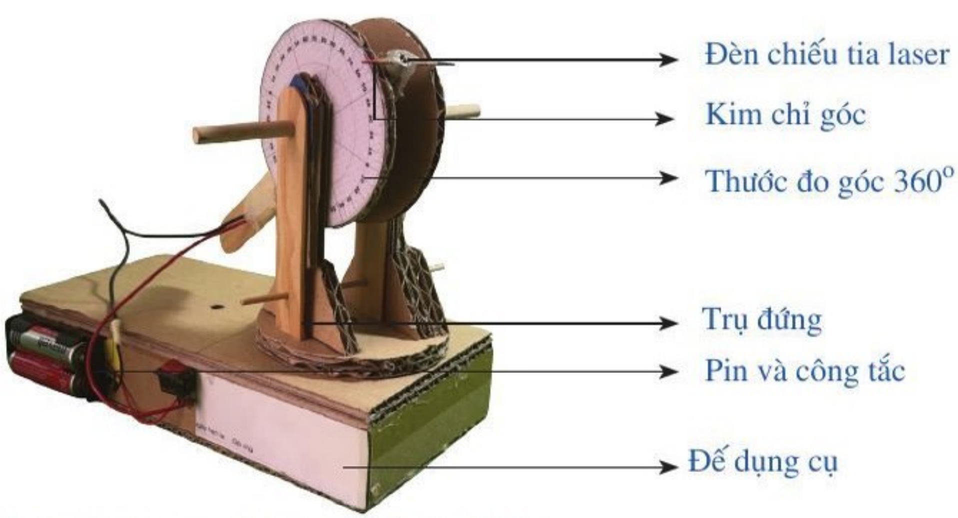


Hình 11

- Xác định rõ nhiệm vụ của nhóm và từng nhiệm vụ thành phần.
- Phân công nhiệm vụ cho các thành viên trong nhóm.
- Xác định thời gian hoàn thành từng nhiệm vụ thành phần và nhiệm vụ chung.

b) Phần thực hiện

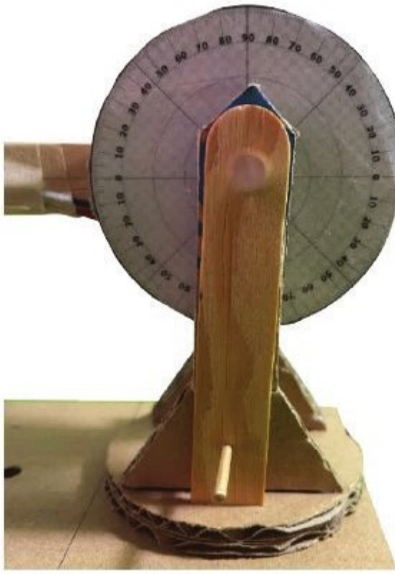
4 Thực hiện tạo dựng dụng cụ đo góc có gắn tia chiếu laser.



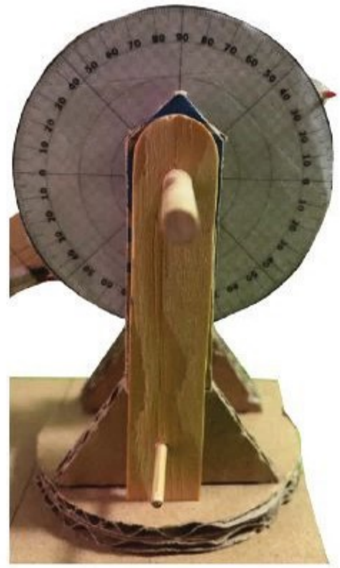
Hình 12. Dụng cụ đo góc có gắn tia chiếu laser

Tạo dựng các phần theo mô hình như *Hình 12*: phần đế, phần thân, phần biểu diễn góc, tia.

Thực hành đo góc



Bước 1



Bước 2

Bước 1. Quay đèn sao cho tia laser trùng với một cạnh của góc cần đo. Điều chỉnh bề mặt thước đo góc sao cho kim chỉ góc màu đỏ chỉ vào vị trí 0^{o}.

Bước 2. Giữ nguyên thước đo góc. Quay đèn sao cho tia laser trùng với cạnh thứ hai của góc cần đo. Kim chỉ góc màu đỏ chỉ vào số nào thì số đó là số đo của góc cần đo.

c) Tổng kết

5 Làm việc chung cả lớp.

- *Nhiệm vụ 1:* Các nhóm báo cáo kết quả.
- *Nhiệm vụ 2:* Tổng kết rút kinh nghiệm.

III. ĐÁNH GIÁ

Hình thức đánh giá: theo hình thức đánh giá của học tập dự án.

1. Đánh giá hoạt động cá nhân

- Mỗi cá nhân tự đánh giá vào phiếu cá nhân.
- Nhóm đánh giá từng thành viên trong nhóm vào phiếu đánh giá cá nhân.

2. Đánh giá hoạt động và sản phẩm của nhóm

- Nhóm tự đánh giá lại hoạt động của nhóm và cho điểm vào phiếu đánh giá hoạt động của nhóm.
- Giáo viên và các nhóm đánh giá rồi cho điểm phần trình bày của từng nhóm vào phiếu đánh giá hoạt động nhóm.

BẢNG GIẢI THÍCH THUẬT NGỮ

THUẬT NGỮ	GIẢI THÍCH	TRANG
bảng biến thiên	bảng thể hiện chiều biến thiên (khoảng đồng biến và khoảng nghịch biến) của một hàm số	36
bảng xét dấu	bảng thể hiện dấu của một biểu thức đại số trong các khoảng giá trị của ẩn	46
bất phương trình bậc hai một ẩn	bất phương trình dạng $ax^2 + bx + c < 0$ (hoặc $ax^2 + bx + c \leq 0$, $ax^2 + bx + c > 0$, $ax^2 + bx + c \geq 0$), trong đó a, b, c là những số thực đã cho, $a \neq 0$	49
giá của vectơ	là đường thẳng đi qua điểm đầu và điểm cuối của vectơ	79
giải tam giác	là tính các cạnh và các góc của tam giác dựa trên những dữ kiện cho trước	72
hai mệnh đề tương đương	hai mệnh đề P và Q mà mệnh đề kéo theo $P \Rightarrow Q$ và $Q \Rightarrow P$ đều đúng	8
hai vectơ bằng nhau	hai vectơ cùng hướng và cùng độ dài	81
hai vectơ cùng phương	hai vectơ có giá song song hoặc trùng nhau	80
hai vectơ đối nhau	hai vectơ ngược hướng và cùng độ dài	85
hàm số bậc hai	hàm số được cho bằng biểu thức có dạng $y = ax^2 + bx + c$, trong đó a, b, c là những hằng số, $a \neq 0$	39
miền nghiệm của bất phương trình bậc nhất hai ẩn	phần mặt phẳng chứa các điểm có toạ độ thoả mãn bất phương trình bậc nhất hai ẩn trong mặt phẳng toạ độ Oxy	22
tam thức bậc hai	đa thức bậc hai $f(x) = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$	44
tập xác định của hàm số	tập các giá trị của biến sao cho biểu thức của hàm số có nghĩa	32
tích vô hướng của hai vectơ	là một số thực được xác định bằng tích độ dài hai vectơ nhân côsin của góc giữa hai vectơ đó	93, 94
vectơ	là đoạn thẳng có hướng	79
vectơ-không	vectơ có điểm đầu và điểm cuối trùng nhau	81

BẢNG TRA CỨU TỪ NGỮ

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC SƯ PHẠM
Địa chỉ: Tầng 6, Toà nhà số 128 đường Xuân Thuỷ, quận Cầu Giấy, TP. Hà Nội
Điện thoại: 024.37547735
Email: nxb@hnue.edu.vn | **Website:** www.nxbdhsp.edu.vn

Chịu trách nhiệm xuất bản:
Giám đốc: NGUYỄN BÁ CƯỜNG
Chịu trách nhiệm nội dung:
Tổng biên tập: ĐỖ VIỆT HÙNG

Chịu trách nhiệm tổ chức bản thảo và bản quyền nội dung:
CÔNG TY CỔ PHẦN ĐẦU TƯ XUẤT BẢN – THIẾT BỊ GIÁO DỤC VIỆT NAM
Chủ tịch Hội đồng Quản trị: NGƯT NGÔ TRẦN ÁI
Tổng Giám đốc: VŨ BÁ KHÁNH

Biên tập:
TẠ THỊ ÁNH – NGUYỄN THỊ NGÂN – ĐÀO ANH TIẾN
Thiết kế sách:
PHAN THỊ LƯƠNG
Trình bày bìa:
TRẦN TIỂU LÂM – PHAN THỊ LƯƠNG
Minh hoạ:
TRẦN THỊ HỒNG HẠNH
Sửa bản in:
LÊ TRUNG DŨNG – VŨ MẠNH HUY

TOÁN 10 - TẬP MỘT

Mã số:
ISBN: ....
In .... cuốn, khổ 19 x 26,5cm, tại ......
Địa chỉ: ....
Số xác nhận đăng kí xuất bản: ...-.../... /...-.../...
Quyết định xuất bản số: .... /....-... ngày ... /... /....
In xong và nộp lưu chiểu

Mang cuộc sống vào bài học
Đưa bài học vào cuộc sống

Toán 10 là cuốn sách giáo khoa dành cho học sinh lớp 10, thuộc bộ sách giáo khoa "Cánh Diều", thực hiện theo "Chương trình Giáo dục phổ thông 2018".

Sách gồm hai tập và chuyên đề học tập được biên soạn đáp ứng yêu cầu phát triển phẩm chất và năng lực của học sinh. Các hoạt động học tập được tổ chức theo tiến trình từ dễ đến khó, hướng đến việc khám phá, phát hiện, thực hành, vận dụng giải quyết vấn đề trong thực tiễn, phù hợp với trình độ nhận thức của học sinh. Sách được trình bày hấp dẫn, khơi gợi sự tò mò, kích thích hứng thú, tạo dựng niềm tin trong học tập môn Toán ở học sinh.

Sách là sản phẩm tâm huyết của tập thể tác giả – những nhà giáo, nhà khoa học giàu kinh nghiệm trong giáo dục phổ thông.

SỬ DỤNG TEM CHỐNG GIẢ

1. Quét mã QR hoặc dùng trình duyệt web để truy cập website bộ sách Cánh Diều: www.hoc10.com
2. Vào mục Hướng dẫn (www.hoc10.com/huong-dan) để kiểm tra sách giả và xem hướng dẫn kích hoạt sử dụng học liệu điện tử.

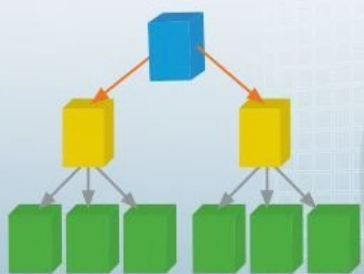
SÁCH KHÔNG BÁN

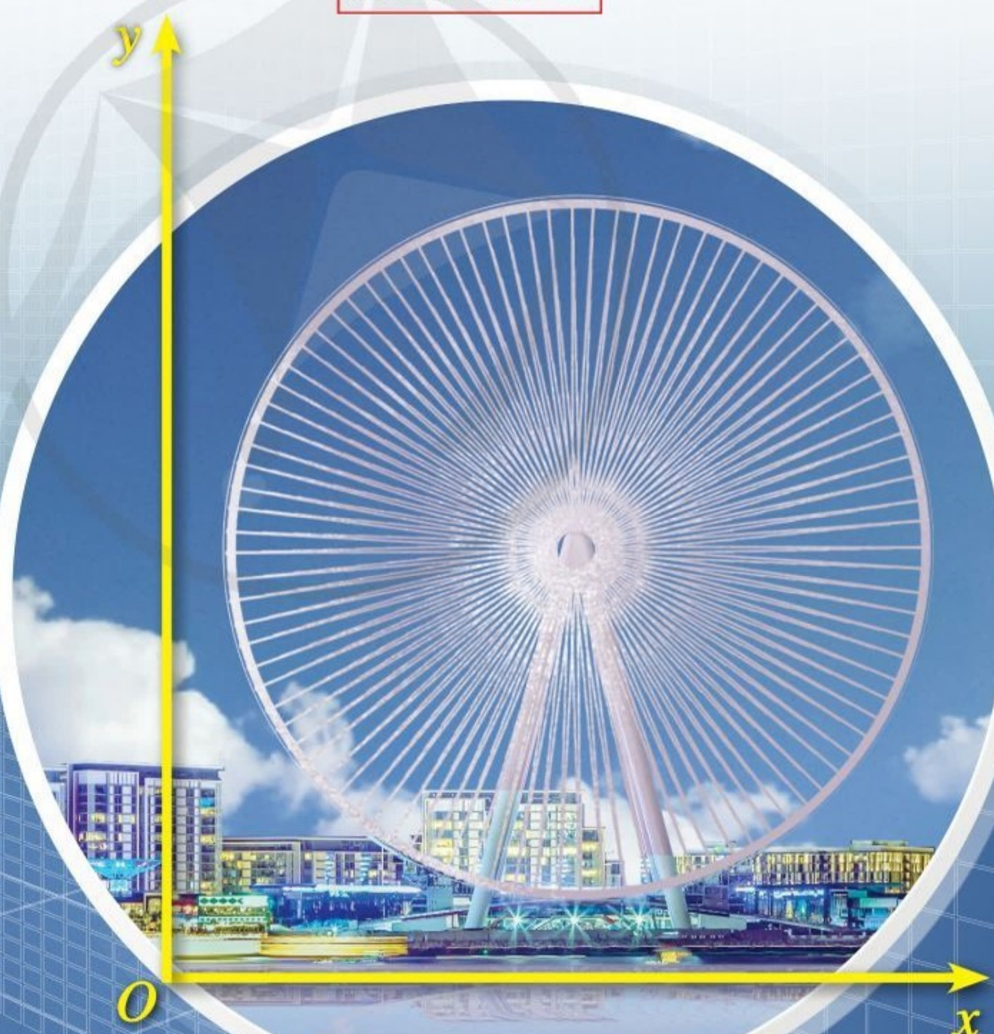
ĐỖ ĐỨC THÁI (Tổng Chủ biên kiêm Chủ biên)
PHẠM XUÂN CHUNG – NGUYỄN SƠN HÀ – NGUYỄN THỊ PHƯƠNG LOAN
PHẠM SỸ NAM – PHẠM MINH PHƯƠNG – PHẠM HOÀNG QUÂN

Toán 10

TẬP HAI

BẢN MẪU





NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

ĐỖ ĐỨC THÁI (Tổng Chủ biên kiêm Chủ biên)
PHẠM XUÂN CHUNG – NGUYỄN SƠN HÀ – NGUYỄN THỊ PHƯƠNG LOAN
PHẠM SỸ NAM – PHẠM MINH PHƯƠNG – PHẠM HOÀNG QUÂN

Toán 10

TẬP HAI

BẢN MẪU

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

MỤC LỤC

CHƯƠNG V ĐẠI SỐ TỔ HỢP

Trong chương này, chúng ta sẽ tìm hiểu những vấn đề sau: quy tắc cộng, quy tắc nhân, sơ đồ hình cây; hoán vị, chỉnh hợp, tổ hợp; nhị thức Newton; áp dụng vào giải các bài toán đếm.

§1 QUY TẮC CỘNG. QUY TẮC NHÂN. SƠ ĐỒ HÌNH CÂY

Hình 1

Sơ đồ ở *Hình 1* cho biết lịch thi đấu giải bóng đá UEFA Champions League 2020 – 2021 bắt đầu từ vòng tứ kết.

Có bao nhiêu trận đấu của giải bóng đá UEFA Champions League 2020 – 2021 bắt đầu từ vòng tứ kết?

I. QUY TẮC CỘNG

1 Gia đình bạn Liên dự định đi du lịch ở Quy Nhơn (Bình Định). Hướng dẫn viên du lịch đưa ra hai chương trình tham quan như sau:

Chương trình 1 có 4 địa điểm tham quan: khu Safari FLC, khu du lịch Eo Gió, khu du lịch Kỳ Co, Tịnh xá Ngọc Hoà (*Hình 2*).

Chương trình 2 có 7 địa điểm tham quan: biển Quy Nhơn, khu du lịch Ghềnh Ráng Tiên Sa, Tháp đôi, đầm Thị Nại, khu du lịch Cửa Biển, Suft Bar, nhà thờ Làng Sông (*Hình 3*).

(Nguồn: https://docmiendatnuoc.com)

Hình 2

(Nguồn: https://docmiendatnuoc.com)

Hình 3

Có bao nhiêu cách chọn một địa điểm tham quan trong số các địa điểm được giới thiệu trong hai chương trình ở trên?

Ta có *quy tắc cộng* sau:

Một công việc được hoàn thành bởi một trong hai hành động. Nếu hành động thứ nhất có m cách thực hiện, hành động thứ hai có n cách thực hiện (các cách thực hiện của cả hai hành động là khác nhau đôi một) thì công việc đó có $m + n$ cách hoàn thành.

Ví dụ 1 Bạn Phương có 7 quyển sách Tiếng Anh và 8 quyển sách Văn học, các quyển sách là khác nhau. Hỏi bạn Phương có bao nhiêu cách chọn một quyển sách để đọc?

Giải

Việc chọn một quyển sách để đọc là thực hiện một trong hai hành động sau:

Chọn một quyển sách Tiếng Anh: Có 7 cách chọn.

Chọn một quyển sách Văn học: Có 8 cách chọn.

Vậy có $7 + 8 = 15$ cách chọn một quyển sách để đọc.

1 Một quán bán ba loại đồ uống: trà sữa, nước hoa quả và sinh tố. Có 5 loại trà sữa, 6 loại nước hoa quả và 4 loại sinh tố. Hỏi khách hàng có bao nhiêu cách chọn một loại đồ uống?

Nhận xét: Tương tự, ta cũng có quy tắc sau:

Một công việc được hoàn thành bởi một trong ba hành động. Nếu hành động thứ nhất có m cách thực hiện, hành động thứ hai có n cách thực hiện, hành động thứ ba có p cách thực hiện (các cách thực hiện của ba hành động là khác nhau đôi một) thì công việc đó có $m + n + p$ cách hoàn thành.

II. QUY TẮC NHÂN

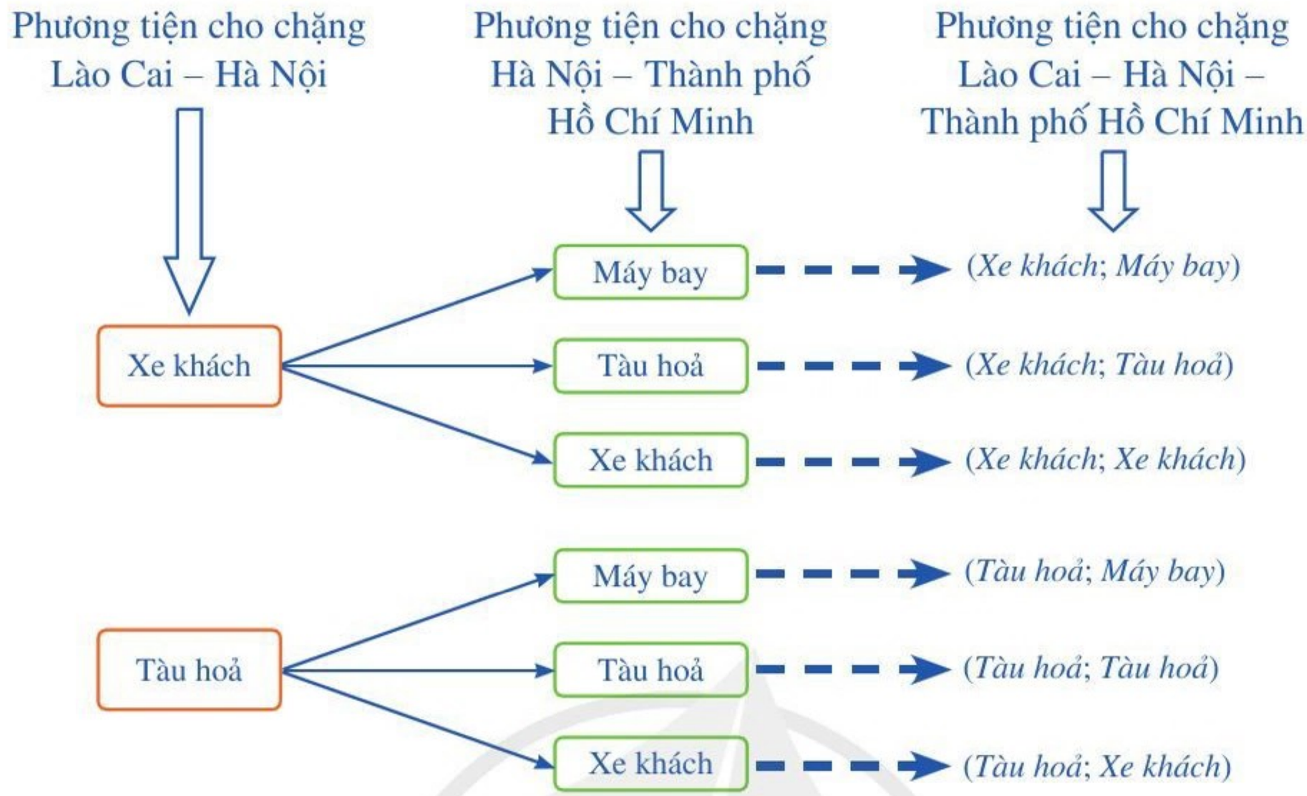
2 Gia đình bạn Thảo dự định đi du lịch từ Lào Cai đến Hà Nội bằng một trong hai phương tiện: xe khách hoặc tàu hoả. Sau đó, từ Hà Nội đi đến Thành phố Hồ Chí Minh bằng một trong ba phương tiện: máy bay, tàu hoả, xe khách (*Hình 4*). Hỏi gia đình bạn Thảo có bao nhiêu cách lựa chọn phương tiện để đi từ Lào Cai đến Thành phố Hồ Chí Minh, qua Hà Nội?

Fansipan (Lào Cai)

Hồ Gươm (Hà Nội)

Bờ sông Sài Gòn (Thành phố Hồ Chí Minh)

(*Nguồn: https://www.shutterstock.com*)



Hình 4

Ta có *quy tắc nhân* sau:

Một công việc được hoàn thành bởi hai hành động liên tiếp. Nếu hành động thứ nhất có m cách thực hiện và ứng với mỗi cách thực hiện hành động thứ nhất, có n cách thực hiện hành động thứ hai thì công việc đó có $m \cdot n$ cách hoàn thành.

Ví dụ 2 Trong Hoạt động 1, nếu gia đình bạn Liên muốn chọn một địa điểm tham quan trong chương trình 1, sau đó đi tham quan tiếp một địa điểm trong chương trình 2 thì có bao nhiêu cách chọn hai địa điểm ở hai chương trình khác nhau để tham quan?

Giải

Việc chọn hai địa điểm ở hai chương trình khác nhau để tham quan là thực hiện hai hành động liên tiếp: chọn một địa điểm trong chương trình 1, sau đó chọn một địa điểm trong chương trình 2.

Có 4 cách chọn địa điểm tham quan trong chương trình 1.

Với mỗi cách chọn một địa điểm tham quan trong chương trình 1 sẽ có 7 cách chọn địa điểm tham quan trong chương trình 2.

Vậy có tất cả $4 \cdot 7 = 28$ cách chọn hai địa điểm tham quan ở hai chương trình khác nhau.

Nhận xét: Tương tự, ta cũng có quy tắc sau:

Một công việc được hoàn thành bởi ba hành động liên tiếp: Nếu hành động thứ nhất có m cách thực hiện; ứng với mỗi cách thực hiện hành động thứ nhất, có n cách thực hiện hành động thứ hai; ứng với mỗi cách thực hiện hành động thứ nhất và mỗi cách thực hiện hành động thứ hai có p cách thực hiện hành động thứ ba thì công việc đó có $m \,.\, n \,.\, p$ cách hoàn thành.

Ví dụ 3 Trong kinh doanh nhà hàng, combo là một hình thức gọi món theo thực đơn được kết hợp từ nhiều món ăn hoặc đồ uống. Nếu nhà hàng có 5 món rau, 4 món cá và 3 món thịt thì có bao nhiêu cách tạo ra một combo? Biết mỗi combo có đầy đủ 1 món rau, 1 món cá và 1 món thịt.

Giải

Để tạo một combo ta thực hiện ba hành động liên tiếp: chọn 1 món rau, chọn 1 món cá và chọn 1 món thịt.

Chọn 1 món rau: Có 5 cách chọn.

Chọn 1 món cá: Có 4 cách chọn.

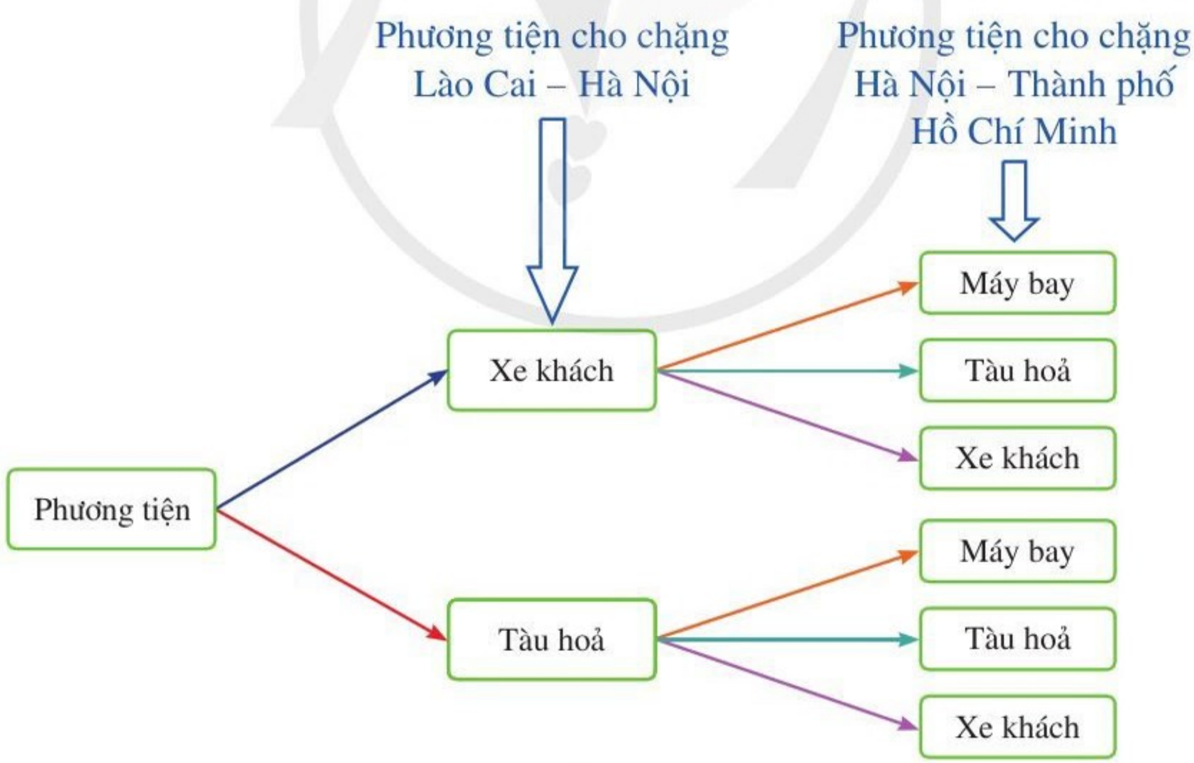
Chọn 1 món thịt: Có 3 cách chọn.

Vậy có $5 \,.\, 4 \,.\, 3 = 60$ cách tạo ra một combo.

2 Bạn Nam dự định đặt mật khẩu cho khoá vali là một số có ba chữ số được chọn ra từ các chữ số 1, 2, 3, 4. Hỏi bạn Nam có bao nhiêu cách đặt mật khẩu?

III. SƠ ĐỒ HÌNH CÂY

3 Sơ đồ trong *Hình 4* mô tả các cách chọn phương tiện đi từ Lào Cai đến Thành phố Hồ Chí Minh của gia đình bạn Thảo có thể vẽ lại như sau (*Hình 5*):

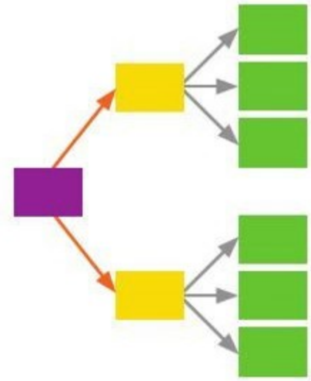


Hình 5

Quan sát sơ đồ hình cây ở *Hình 5*, cho biết có bao nhiêu cách chọn phương tiện đi từ Lào Cai đến Thành phố Hồ Chí Minh, qua Hà Nội.

Nhận xét

- *Sơ đồ hình cây* (*Hình 6*) là sơ đồ bắt đầu tại một nút duy nhất với các nhánh toả ra các nút bổ sung.
- Ta có thể sử dụng sơ đồ hình cây để đếm số cách hoàn thành một công việc khi công việc đó đòi hỏi những hành động liên tiếp.



Hình 6

Ví dụ 4 Bạn Hương có 3 chiếc quần khác màu: xám, đen, nâu nhạt và 4 chiếc áo sơ mi khác màu: hồng, vàng, xanh, tím. Hãy vẽ sơ đồ hình cây biểu thị số cách chọn:

a) 1 chiếc quần; b) 1 chiếc áo sơ mi; c) 1 bộ quần áo.

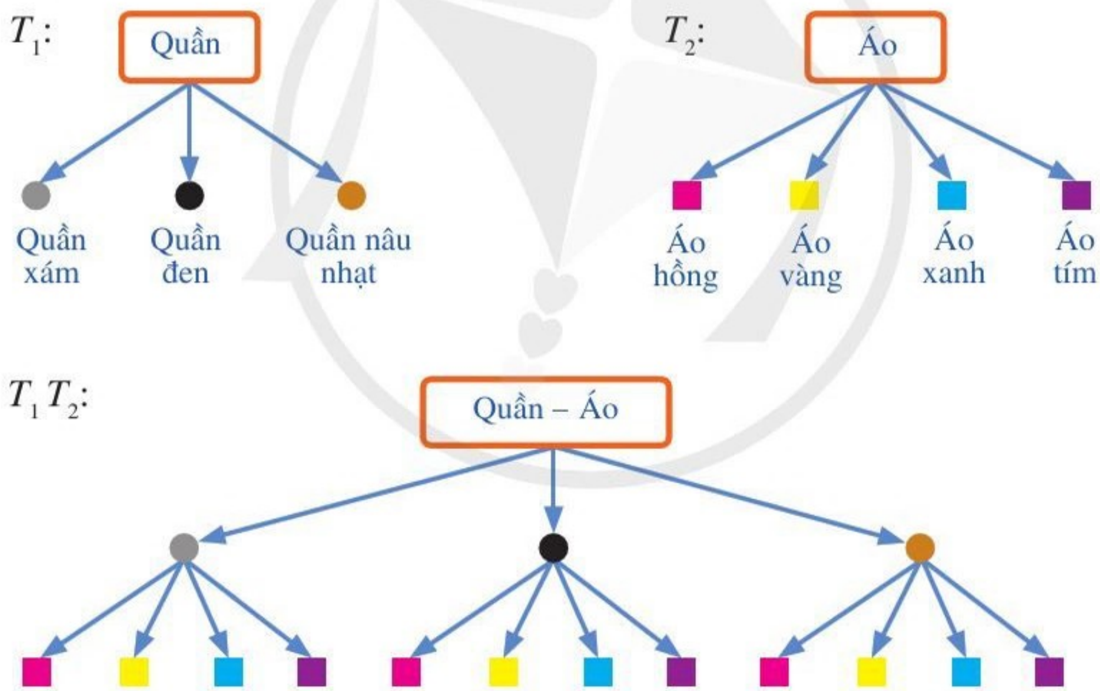
Giải

Các sơ đồ hình cây T_1, T_2, T_1T_2 trong *Hình 7* lần lượt:

a) Biểu thị số cách chọn 1 chiếc quần;

b) Biểu thị số cách chọn 1 chiếc áo sơ mi;

c) Biểu thị số cách chọn 1 bộ quần áo.



Hình 7

IV. VẬN DỤNG TRONG BÀI TOÁN ĐẾM

Việc kiểm đếm có ý nghĩa quan trọng trong toán học và thực tiễn, đặc biệt trong thống kê và xác suất. Kết quả đếm cho phép chúng ta xác định được số các khả năng mà một sự kiện có thể xảy ra để làm cơ sở cho việc đưa ra quyết định. Quy tắc cộng, quy tắc nhân và sơ đồ hình cây là những nguyên tắc cơ bản trong các bài toán đếm.

1. Vận dụng trong giải toán

Ví dụ 5 Cho 10 điểm phân biệt. Hỏi lập được bao nhiêu vectơ khác $\vec{0}$? Biết rằng hai đầu mút của mỗi vectơ là hai trong 10 điểm đã cho.

> **3** Từ các chữ số 1, 2, 3, 4, 5, lập được bao nhiêu số lẻ gồm ba chữ số đôi một khác nhau?

Giải

Việc lập vectơ là thực hiện hai hành động liên tiếp: chọn điểm đầu và chọn điểm cuối.

Chọn điểm đầu: có 10 cách chọn. Chọn điểm cuối: có 9 cách chọn.

Theo quy tắc nhân, số vectơ lập được là: $10 \cdot 9 = 90$ (vectơ).

Ví dụ 6 Phân tích số 675 ra thừa số nguyên tố rồi tìm số ước nguyên dương của nó.

Giải

Ta có: $675 = 3^3 \cdot 5^2$. Một ước nguyên dương của 675 thì có dạng $3^m \cdot 5^n$, trong đó m, n là hai số tự nhiên sao cho $0 \le m \le 3$, $0 \le n \le 2$.

Như vậy, để tạo ra một ước nguyên dương của 675 ta làm như sau:

– Chọn số tự nhiên m mà $0 \le m \le 3$ có 4 cách chọn.

– Chọn số tự nhiên n mà $0 \le n \le 2$ có 3 cách chọn.

– Lấy tích $3^m \cdot 5^n$.

Theo quy tắc nhân, số ước nguyên dương của 675 là: $4 \cdot 3 = 12$ (số).

2. Vận dụng trong thực tiễn

Ví dụ 7 Từ ba mảng dữ liệu A, B, C, máy tính tạo nên một thông tin đưa ra màn hình cho người dùng bằng cách lần lượt lấy một dữ liệu từ A, một dữ liệu từ B và một dữ liệu từ C. Giả sử A, B, C lần lượt chứa m, n, p dữ liệu. Hỏi máy tính có thể tạo ra được bao nhiêu thông tin?

Giải

Việc máy tính tạo ra thông tin là thực hiện ba cách chọn liên tiếp: chọn dữ liệu từ A, chọn dữ liệu từ B và chọn dữ liệu từ C.

Có m cách chọn một dữ liệu từ A.

Có n cách chọn một dữ liệu từ B.

Có p cách chọn một dữ liệu từ C.

Theo quy tắc nhân, số thông tin máy tính có thể tạo được là: $m \cdot n \cdot p$.

Ví dụ 8 Đội văn nghệ của lớp 10B có 3 học sinh nữ và 2 học sinh nam. Giáo viên chủ nhiệm muốn chọn ra một đội tam ca gồm 3 học sinh sao cho có cả học sinh nam và học sinh nữ. Hỏi giáo viên chủ nhiệm có bao nhiêu cách chọn ra một đội tam ca như vậy?

Giải

Khi chọn ra một đội tam ca gồm 3 học sinh có cả nam và nữ, giáo viên chủ nhiệm chỉ có thể chọn theo một trong hai khả năng sau:

– Chọn ra một học sinh nữ và hai học sinh nam;

– Chọn ra hai học sinh nữ và một học sinh nam.

• *Xét khả năng thứ nhất:* Chọn ra một học sinh nữ và hai học sinh nam.

Có 3 cách chọn ra một học sinh nữ.

Có 1 cách chọn ra hai học sinh nam.

Theo quy tắc nhân, số cách chọn ra một học sinh nữ và hai học sinh nam là: 3 . 1 = 3.

• *Xét khả năng thứ hai:* Chọn ra hai học sinh nữ và một học sinh nam.

Có 3 cách chọn ra hai học sinh nữ.

Có 2 cách chọn ra một học sinh nam.

Theo quy tắc nhân, số cách chọn ra hai học sinh nữ và một học sinh nam là: 3 . 2 = 6.

Theo quy tắc cộng, số cách chọn ra một đội tam ca gồm 3 học sinh sao cho có cả học sinh nam và học sinh nữ cùng tham gia là: 3 + 6 = 9 (cách).

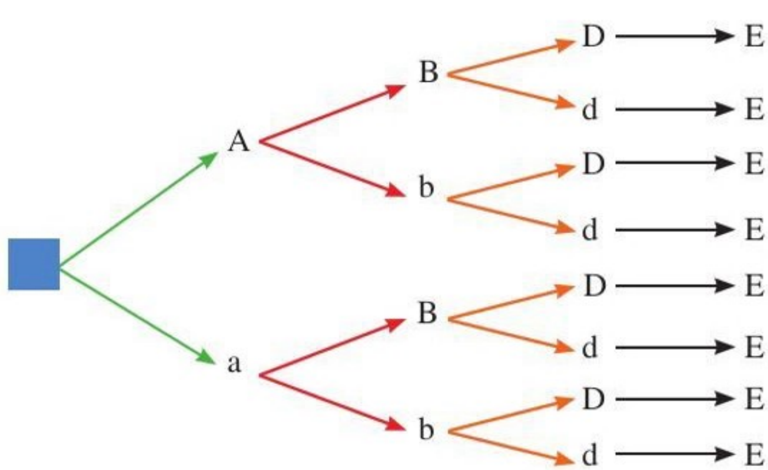
Ví dụ 9 Cho kiểu gen AaBbDdEE. Giả sử quá trình giảm phân tạo giao tử bình thường, không xảy ra đột biến.

a) Vẽ sơ đồ hình cây biểu thị sự hình thành giao tử.

b) Từ đó, tính số loại giao tử của kiểu gen AaBbDdEE.

Giải

a) Sơ đồ hình cây biểu thị sự hình thành giao tử:



b) Từ sơ đồ hình cây, ta có 8 loại giao tử của kiểu gen AaBbDdEE.

BÀI TẬP

1. Từ các chữ số 1, 2, 3, 4, 5, 6, ta lập ra số tự nhiên gồm ba chữ số, chia hết cho 5. Có thể lập được bao nhiêu số như thế?

2. Từ các chữ số 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, lập được bao nhiêu

a) Số chẵn gồm ba chữ số?

b) Số chẵn gồm ba chữ số đôi một khác nhau?

3. Trong một trường trung học phổ thông, khối 10 có 245 học sinh nam và 235 học sinh nữ.

a) Nhà trường cần chọn một học sinh ở khối 10 đi dự buổi giao lưu với học sinh các trường trung học phổ thông trong tỉnh. Hỏi nhà trường có bao nhiêu cách chọn?

b) Nhà trường cần chọn hai học sinh ở khối 10, trong đó có 1 nam và 1 nữ, đi dự trại hè của học sinh trong tỉnh. Hỏi nhà trường có bao nhiêu cách chọn?

4. Trong giải thi đấu bóng đá World Cup, vòng bảng có 32 đội tham gia, được chia làm 8 bảng, mỗi bảng có 4 đội đấu vòng tròn một lượt. Tính số trận đấu được thi đấu trong vòng bảng theo thể thức trên.

5. Ở Canada, mã bưu chính có 6 kí tự gồm: 3 chữ cái in hoa (trong số 26 chữ cái tiếng Anh) và 3 chữ số. Mỗi mã bưu chính bắt đầu bằng 1 chữ cái và xen kẽ bằng 1 chữ số.

(*Nguồn: https://capath.vn/postal-code-canada*)

a) Có thể tạo được bao nhiêu mã bưu chính?

b) Có thể tạo được bao nhiêu mã bắt đầu bằng chữ *S*?

c) Có thể tạo được bao nhiêu mã bắt đầu bằng chữ *S* và kết thúc bằng chữ số 8?

6. Một hãng thời trang đưa ra một mẫu áo sơ mi mới có ba màu: trắng, xanh, đen. Mỗi loại có các cỡ S, M, L, XL, XXL.

a) Vẽ sơ đồ hình cây biểu thị các loại áo sơ mi với màu và cỡ áo nói trên.

b) Nếu một cửa hàng muốn mua tất cả các loại áo sơ mi (đủ loại màu và đủ loại cỡ áo) và mỗi loại một chiếc để về giới thiệu thì cần mua tất cả bao nhiêu chiếc áo sơ mi?

7. Một khách sạn nhỏ chuẩn bị bữa ăn sáng gồm 2 đồ uống là: trà và cà phê; 3 món ăn là: phở, bún và cháo; 2 món tráng miệng là: bánh ngọt và sữa chua.

a) Vẽ sơ đồ hình cây biểu thị các cách chọn khẩu phần ăn gồm đủ ba loại: đồ uống, món ăn và món tráng miệng.

b) Tính số cách chọn khẩu phần ăn gồm: 1 đồ uống, 1 món ăn và 1 món tráng miệng.

8. Cho kiểu gen AaBbDdEe. Giả sử quá trình giảm phân tạo giao tử bình thường, không xảy ra đột biến.

a) Vẽ sơ đồ hình cây biểu thị sự hình thành giao tử.

b) Từ đó, tính số loại giao tử của kiểu gen AaBbDdEe.

§2 HOÁN VỊ. CHỈNH HỢP

(Nguồn: https://shutterstock.com)

Trong vòng đấu loại trực tiếp của giải bóng đá, nếu sau khi kết thúc 90 phút thi đấu và hai hiệp phụ mà kết quả vẫn hoà thì loạt đá luân lưu 11 m sẽ được thực hiện. Trước hết, mỗi đội cử ra 5 cầu thủ thực hiện loạt đá luân lưu.

Trong toán học, mỗi cách xếp thứ tự đá luân lưu của 5 cầu thủ được gọi là gì?

I. HOÁN VỊ

1. Định nghĩa

1 Huấn luyện viên chọn 5 cầu thủ An, Bình, Cường, Dũng, Hải đá luân lưu 11 m. Nêu ba cách xếp thứ tự đá luân lưu 11 m của 5 cầu thủ trên.

> Cho tập hợp A gồm n phần tử ($n \in \mathbb{N}^*$).
> Mỗi kết quả của sự sắp xếp thứ tự n phần tử của tập hợp A được gọi là một *hoán vị của n phần tử* đó.

Ví dụ 1 Hãy liệt kê các số gồm ba chữ số đôi một khác nhau được lập từ các chữ số 1, 2, 3.

Giải

Các số gồm ba chữ số đôi một khác nhau được lập từ các chữ số 1, 2, 3 là:

$$123, 132, 213, 231, 312, 321.$$

2. Số các hoán vị

2 Một lớp được chia thành 3 nhóm A, B, C để tham gia hoạt động thực hành trải nghiệm. Sau khi các nhóm thực hiện xong hoạt động, giáo viên sắp xếp thứ tự trình bày của 3 nhóm.

a) Có bao nhiêu cách chọn nhóm trình bày thứ nhất?

b) Sau khi đã chọn nhóm trình bày thứ nhất, có bao nhiêu cách chọn nhóm trình bày thứ hai?

c) Sau khi đã chọn hai nhóm trình bày thứ nhất và thứ hai, có bao nhiêu cách chọn nhóm trình bày thứ ba?

d) Với cách làm như trên, giáo viên tạo ra một hoán vị của 3 phần tử. Tính số các hoán vị được tạo ra.

Theo quy tắc nhân, số các hoán vị của 3 phần tử là: $3 \,.\, 2 \,.\, 1 = 6$.

Trong trường hợp tổng quát, đối với tập hợp A có n phần tử ($n \geq 1$), ta làm tương tự như trên để tạo ra một hoán vị của n phần tử đó và số các hoán vị của n phần tử trong tập hợp A là: $n(n-1) \ldots 2 . 1$.

Kí hiệu P_n là số các hoán vị của n phần tử. Ta có: $\mathrm{P}_n = n(n-1) \ldots 2 . 1$.

Quy ước: Tích $1 . 2 \ldots n$ được viết là $n!$ (đọc là n giai thừa), tức là $n! = 1 . 2 \ldots n$.

Như vậy $\mathrm{P}_n = n!$.

Ví dụ 2 Tính số cách xếp thứ tự đá luân lưu 11 m của 5 cầu thủ.

Giải

Mỗi cách xếp thứ tự đá luân lưu 11 m của 5 cầu thủ là một hoán vị của 5 cầu thủ.

Vậy số cách sắp xếp là: $\mathrm{P}_5 = 5 . 4 . 3 . 2 . 1 = 120$.

1 Có bao nhiêu số gồm sáu chữ số đôi một khác nhau được tạo thành từ các chữ số 1, 2, 3, 4, 5, 6?

II. CHỈNH HỢP

1. Định nghĩa

3 Cho 3 điểm A, B, C không thẳng hàng. Liệt kê các vectơ (khác $\vec{0}$) có điểm đầu và điểm cuối là 2 trong 3 điểm trên.

Để tạo ra một vectơ như trên, ta phải chọn ra 2 trong 3 điểm A, B, C và xác định thứ tự 2 điểm đó.

Trong thực tiễn, bên cạnh việc chọn ra một số đối tượng từ những đối tượng cho trước, ta còn cần sắp xếp thứ tự của những đối tượng được chọn ra.

4 Một lớp có 4 nhóm học tập được đặt tên là A, B, C, D. Giáo viên thực hiện hành động sau: chọn 2 nhóm trong 4 nhóm, sau đó sắp xếp thứ tự trình bày của 2 nhóm đã được chọn ra. Nêu 4 kết quả thực hiện hành động của giáo viên.

Ta gọi mỗi kết quả thực hiện hành động như thế là một chỉnh hợp chập 2 của 4 phần tử đã cho.

Cho tập hợp A gồm n phần tử và một số nguyên k với $1 \leq k \leq n$.

Mỗi kết quả của việc lấy k phần tử từ n phần tử của tập hợp A và sắp xếp chúng theo một thứ tự nào đó được gọi là một *chỉnh hợp chập k của n phần tử* đã cho.

Ví dụ 3 Hãy liệt kê các số gồm hai chữ số khác nhau được lấy từ các chữ số 1, 2, 3, 4, 5.

Giải

Các số gồm hai chữ số khác nhau được lấy từ các chữ số 1, 2, 3, 4, 5 là:

12, 13, 14, 15, 21, 23, 24, 25, 31, 32, 34, 35, 41, 42, 43, 45, 51, 52, 53, 54.

2. Số các chỉnh hợp

5 Một lớp được chia thành 5 nhóm A, B, C, D, E để tham gia hoạt động thực hành trải nghiệm. Sau khi các nhóm thực hiện xong hoạt động, giáo viên chọn 3 nhóm trong 5 nhóm và sắp xếp thứ tự trình bày kết quả hoạt động của 3 nhóm đã được chọn ra.

a) Có bao nhiêu cách chọn nhóm trình bày thứ nhất?

b) Sau khi đã chọn nhóm trình bày thứ nhất, có bao nhiêu cách chọn nhóm trình bày thứ hai?

c) Sau khi đã chọn hai nhóm trình bày thứ nhất và thứ hai, có bao nhiêu cách chọn nhóm trình bày thứ ba?

d) Với cách làm như trên, giáo viên tạo ra một chỉnh hợp chập 3 của 5 phần tử. Tính số các chỉnh hợp được tạo ra.

Theo quy tắc nhân, số các chỉnh hợp chập 3 của 5 phần tử là:

$5 . 4 . 3 = 60.$

Trong trường hợp tổng quát, đối với tập hợp A có n phần tử ($n \geq 1$), ta làm tương tự như trên để tạo ra một chỉnh hợp chập k của n phần tử đó ($1 \leq k \leq n$) và số các chỉnh hợp chập k của n phần tử trong tập hợp A là: $n(n-1)...(n-k+1)$.

Kí hiệu A_n^k là số các chỉnh hợp chập k của n phần tử ($1 \leq k \leq n$).

Ta có: $\mathrm{A}_n^k = n(n-1)...(n-k+1)$.

Nhận xét: $\mathrm{A}_n^n = \mathrm{P}_n \ \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Ví dụ 4 Ở các căn hộ chung cư, người ta thường dùng các chữ số để tạo mật mã cửa. Gia đình bạn Linh đặt mật mã cửa là một dãy số gồm 6 chữ số đôi một khác nhau. Hỏi gia đình bạn Linh có bao nhiêu cách để tạo mật mã?

Giải

Mỗi mật mã của gia đình bạn Linh là một chỉnh hợp chập 6 của 10 chữ số.

Vậy có $\mathrm{A}_{10}^6 = 10 . 9 . 8 . 7 . 6 . 5 = 151\,200$ (cách để tạo mật mã).

6 Ta có thể tính số các hoán vị và số các chỉnh hợp bằng máy tính cầm tay như sau:

Nút giai thừa: $\boxed{x!}$; nút chỉnh hợp $\boxed{\text{nPr}}$.

Tính	Nút ấn	Kết quả
5!	$\boxed{5}\boxed{\text{SHIFT}}\boxed{x!}\boxed{=}$	120
A_{10}^{6}	$\boxed{10}\boxed{\text{SHIFT}}\boxed{\text{nPr}}\boxed{6}\boxed{=}$	151 200

Ví dụ 5 Dùng máy tính cầm tay để tính: 12!; A_{12}^{6}.

Giải

Tính	Nút ấn	Kết quả
12!	$\boxed{12}\boxed{\text{SHIFT}}\boxed{x!}\boxed{=}$	479 001 600
A_{12}^{6}	$\boxed{12}\boxed{\text{SHIFT}}\boxed{\text{nPr}}\boxed{6}\boxed{=}$	665 280

2 Trong vòng đấu loại trực tiếp của một giải bóng đá, nếu sau khi kết thúc 90 phút thi đấu và cả hai hiệp phụ của trận đấu mà kết quả vẫn hoà thì loạt đá luân lưu 11 m sẽ được thực hiện. Tính số cách xếp thứ tự 5 cầu thủ đá luân lưu của đội bóng có 11 cầu thủ.

BÀI TẬP

1. Từ các chữ số 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, ta lập được bao nhiêu số tự nhiên

a) Gồm 8 chữ số đôi một khác nhau? b) Gồm 6 chữ số đôi một khác nhau?

2. Trong chương trình ngoại khoá giáo dục truyền thống, 60 học sinh được trường tổ chức cho đi xem phim. Các ghế ở rạp được sắp thành các hàng. Mỗi hàng có 20 ghế.

a) Có bao nhiêu cách sắp xếp 20 bạn để ngồi vào hàng đầu tiên?

b) Sau khi sắp xếp xong hàng đầu tiên, có bao nhiêu cách sắp xếp 20 bạn để ngồi vào hàng thứ hai?

c) Sau khi sắp xếp xong hai hàng đầu, có bao nhiêu cách sắp xếp 20 bạn để ngồi vào hàng thứ ba?

3. Bạn Việt chọn mật khẩu cho email của mình gồm 8 kí tự đôi một khác nhau, trong đó có 3 kí tự đầu tiên là 3 chữ cái trong bảng gồm 26 chữ cái in thường và 5 kí tự tiếp theo là chữ số. Bạn Việt có bao nhiêu cách tạo ra mật khẩu?

4. Mỗi máy tính tham gia vào mạng phải có một địa chỉ duy nhất, gọi là địa chỉ IP, nhằm định danh máy tính đó trên Internet. Xét tập hợp A gồm các địa chỉ IP có dạng 192.168.abc.deg, trong đó a, b, c là các chữ số phân biệt được chọn ra từ các chữ số 0, 1, 2, 3, 4, còn d, e, g là các chữ số phân biệt được chọn ra từ các chữ số 5, 6, 7, 8, 9. Hỏi tập hợp A có bao nhiêu phần tử?

5. Một nhóm 22 bạn đi chụp ảnh kỉ yếu. Nhóm muốn trong bức ảnh có 7 bạn ngồi ở hàng đầu và 15 bạn đứng ở hàng sau. Có bao nhiêu cách xếp vị trí chụp ảnh như vậy?

§3 TỔ HỢP

(*Nguồn: https://shutterstock.com*)

Trong giải bóng bàn đôi nam, mỗi đội chọn 2 vận động viên để tạo thành một cặp đấu.

Trong toán học, mỗi cách chọn 2 vận động viên từ các vận động viên để tạo thành một cặp đấu được gọi là gì?

1. Định nghĩa

1 Đội tuyển bóng bàn nam của trường có 4 bạn Mạnh, Phong, Cường, Tiến. Huấn luyện viên muốn chọn 2 bạn để tạo thành một cặp đấu đôi nam.

a) Nêu 3 cách chọn cặp đấu.

b) Mỗi cặp đấu là một tập con gồm bao nhiêu phần tử được lấy ra từ tập hợp gồm 4 bạn nói trên?

Cho tập hợp A gồm n phần tử và một số nguyên k với $1 \leq k \leq n$.

Mỗi tập con gồm k phần tử được lấy ra từ n phần tử của A được gọi là một *tổ hợp chập k của n phần tử* đó.

Ví dụ 1 Bạn Quân có 4 chiếc áo sơ mi khác màu là áo vàng, áo xanh, áo trắng và áo nâu. Bạn muốn chọn 2 chiếc áo để mặc khi đi du lịch. Viết các tổ hợp chập 2 của 4 chiếc áo.

Giải

Các tổ hợp chập 2 của 4 chiếc áo là:

{áo vàng; áo xanh}, {áo vàng; áo trắng}, {áo vàng; áo nâu}, {áo xanh; áo trắng}, {áo xanh; áo nâu}, {áo trắng; áo nâu}.

1 Viết tất cả tổ hợp chập 2 của 3 phần tử a, b, c.

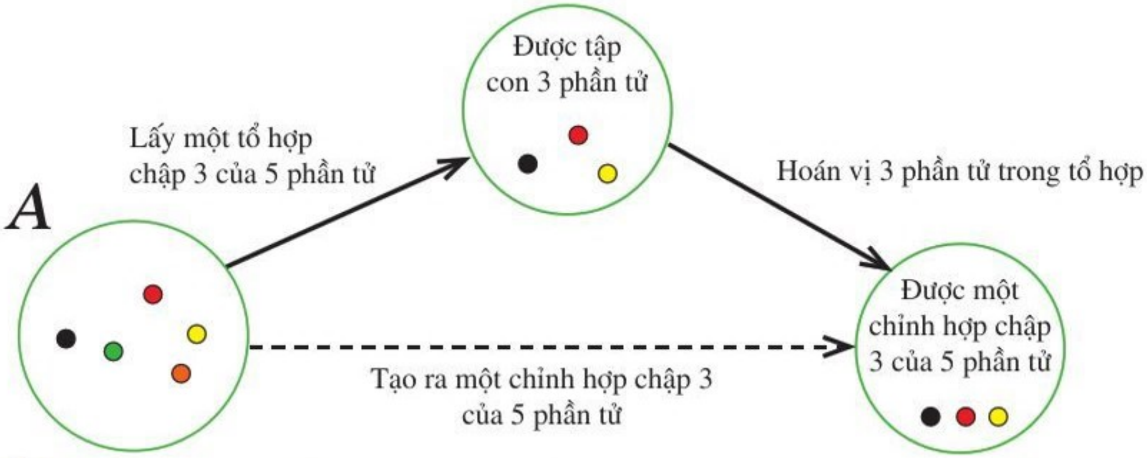
2. Số các tổ hợp

2 Cho tập hợp $A = \{a; b; c; d; e\}$.

a) Nêu cách lấy ra một tổ hợp chập 3 của 5 phần tử trong A.

b) Nêu cách lấy ra một chỉnh hợp chập 3 của 5 phần tử trong A.

c) So sánh cách lấy ra một chỉnh hợp chập 3 của 5 phần tử trong A với cách lấy ra một tổ hợp chập 3 của 5 phần tử trong A.



Mỗi tổ hợp chập 3 của 5 phần tử sinh ra 3! chỉnh hợp chập 3 của 5 phần tử vì có 3! hoán vị của 3 phần tử. Vì thế, số chỉnh hợp chập 3 của 5 phần tử nhiều gấp 3! lần số tổ hợp chập 3 của 5 phần tử.

Nhận xét: Số chỉnh hợp chập k của n phần tử nhiều gấp $k!$ lần số tổ hợp chập k của n phần tử đó.

Kí hiệu C_n^k là số tổ hợp chập k của n phần tử với $1 \le k \le n$. Ta có: $\mathrm{C}_n^k = \dfrac{\mathrm{A}_n^k}{k!}$.

Ví dụ 2 Chứng minh $\mathrm{C}_n^k = \dfrac{n!}{k!\,(n-k)!}$ với $1 \le k \le n$.

Giải

Ta có: $\mathrm{A}_n^k = n(n-1)...(n-k+1) = \dfrac{n(n-1)...(n-k+1)(n-k)...2\,.\,1}{(n-k)...2\,.\,1} = \dfrac{n!}{(n-k)!}$.

Do đó $\mathrm{C}_n^k = \dfrac{\mathrm{A}_n^k}{k!} = \dfrac{n!}{k!\,(n-k)!}$.

Quy ước: $0! = 1$; $\mathrm{C}_n^0 = 1$.

Với những quy ước trên, ta có công thức sau:

$$\mathrm{C}_n^k = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} \text{ với } 0 \le k \le n.$$

Ví dụ 3 Lớp 10A có 18 bạn nữ và 20 bạn nam.

a) Có bao nhiêu cách chọn 3 bạn nữ trong 18 bạn nữ?

b) Có bao nhiêu cách chọn 5 bạn nam trong 20 bạn nam?

c) Có bao nhiêu cách chọn một tổ xung kích gồm 3 bạn nữ và 5 bạn nam?

Giải

a) Mỗi cách chọn 3 bạn nữ trong 18 bạn nữ là một tổ hợp chập 3 của 18 phần tử, do đó có C_{18}^3 cách chọn.

b) Mỗi cách chọn 5 bạn nam trong 20 bạn nam là một tổ hợp chập 5 của 20 phần tử, do đó có C_{20}^5 cách chọn.

c) Số cách chọn một tổ xung kích gồm 3 bạn nữ và 5 bạn nam là:

$$C_{18}^3 \cdot C_{20}^5 = 816 \cdot 15\,504 = 12\,651\,264 \text{ (cách chọn).}$$

2 Trong một buổi tập huấn cho các bí thư chi đoàn có 10 bạn nam. Hỏi có bao nhiêu cách chọn 3 bạn nam để tham gia một trò chơi?

3 Ta có thể tính số các tổ hợp bằng máy tính cầm tay như sau: Nút tổ hợp: nCr.

Tính	Nút ấn	Kết quả
C_{10}^4	10 SHIFT nCr 4 =	210

3 Dùng máy tính cầm tay để tính:

a) C_{25}^{13}; b) C_{30}^{15}.

3. Tính chất của các số C_n^k

4 So sánh: a) C_6^2 và C_6^4; b) $C_4^2 + C_4^3$ và C_5^3.

Một cách tổng quát, ta có hai đẳng thức sau:

$$C_n^k = C_n^{n-k} \ (0 \le k \le n) \text{ và } C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k = C_n^k \ (1 \le k < n).$$

BÀI TẬP

1. Cho 8 điểm sao cho không có 3 điểm nào thẳng hàng. Có bao nhiêu tam giác với 3 đỉnh là 3 điểm trong 8 điểm đã cho?
2. Có 10 đội tham gia một giải bóng đá. Có bao nhiêu cách xếp trận đấu vòng tính điểm sao cho hai đội chỉ gặp nhau đúng một lần?
3. Khối 10 có 16 bạn nữ và 18 bạn nam tham gia đợt tình nguyện Mùa hè xanh. Đoàn trường dự định lập một tổ trồng cây gồm 3 học sinh có cả nam và nữ. Có bao nhiêu cách lập một tổ trồng cây như vậy?
4. Một quán nhỏ bày bán hoa có 50 bông hồng và 60 bông cúc. Bác Ngọc muốn mua 5 bông hoa gồm cả hai loại hoa trên. Bác Ngọc có bao nhiêu cách chọn hoa?
5. Tính tổng $C_{15}^{12} + C_{15}^{13} + C_{16}^{14}$.

§4 NHỊ THỨC NEWTON

Làm thế nào để khai triển các biểu thức $(a + b)^4$, $(a + b)^5$ một cách nhanh chóng?

Ta đã biết $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = 1 \,.\, a^3 + 3 \,.\, a^2 \,.\, b^1 + 3 \,.\, a^1 \,.\, b^2 + 1 \,.\, b^3$.

a) Tính $C_3^0, C_3^1, C_3^2, C_3^3$.

b) Chọn số thích hợp cho $\boxed{?}$ trong khai triển sau:

$$(a+b)^3 = C_3^{\boxed{?}} \,.\, a^{3-\boxed{?}} + C_3^{\boxed{?}} \,.\, a^{3-\boxed{?}} \,.\, b^1 + C_3^{\boxed{?}} \,.\, a^{3-\boxed{?}} \,.\, b^2 + C_3^{\boxed{?}} \,.\, b^3.$$

$$(a+b)^3 = C_3^0 \,.\, a^{3-0} + C_3^1 \,.\, a^{3-1} \,.\, b^1 + C_3^2 \,.\, a^{3-2} \,.\, b^2 + C_3^3 \,.\, b^3.$$

Mỗi số hạng trong tổng đều có dạng $C_3^k \,.\, a^{3-k} \,.\, b^k$.

Tương tự như vậy, ta có các khai triển sau:

$$(a+b)^4 = C_4^0 \,.\, a^{4-0} + C_4^1 \,.\, a^{4-1} \,.\, b^1 + C_4^2 \,.\, a^{4-2} \,.\, b^2 + C_4^3 \,.\, a^{4-3} \,.\, b^3 + C_4^4 \,.\, b^4$$
$$= C_4^0a^4 + C_4^1a^3b + C_4^2a^2b^2 + C_4^3ab^3 + C_4^4b^4.$$

$$(a+b)^5 = C_5^0 \,.\, a^{5-0} + C_5^1 \,.\, a^{5-1} \,.\, b^1 + C_5^2 \,.\, a^{5-2} \,.\, b^2 + C_5^3 \,.\, a^{5-3} \,.\, b^3 + C_5^4 \,.\, a^{5-4} \,.\, b^4 + C_5^5 \,.\, b^5$$
$$= C_5^0a^5 + C_5^1a^4b + C_5^2a^3b^2 + C_5^3a^2b^3 + C_5^4ab^4 + C_5^5b^5.$$

$$(a+b)^4 = C_4^0a^4 + C_4^1a^3b + C_4^2a^2b^2 + C_4^3ab^3 + C_4^4b^4$$
$$= a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4.$$
$$(a+b)^5 = C_5^0a^5 + C_5^1a^4b + C_5^2a^3b^2 + C_5^3a^2b^3 + C_5^4ab^4 + C_5^5b^5$$
$$= a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5.$$

Những công thức khai triển nói trên là công thức nhị thức Newton $(a + b)^n$ ứng với $n = 4$; $n = 5$.

Bằng cách như thế, ta có thể khai triển được $(a + b)^n$ với n là số nguyên dương lớn hơn 5. Công thức khai triển cụ thể được trình bày trong Chuyên đề học tập Toán 10.

Ví dụ 1 Khai triển biểu thức $(x+1)^4$.

Giải

Ta có: $(x+1)^4 = x^4 + 4 \cdot x^3 \cdot 1 + 6 \cdot x^2 \cdot 1^2 + 4 \cdot x \cdot 1^3 + 1^4$

$= x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1.$

Ví dụ 2 Khai triển biểu thức $(x-1)^4$.

Giải

Ta có: $(x-1)^4 = [x + (-1)]^4$

$= x^4 + 4 \cdot x^3 \cdot (-1) + 6 \cdot x^2 \cdot (-1)^2 + 4 \cdot x \cdot (-1)^3 + (-1)^4$

$= x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1.$

Ví dụ 3 Khai triển các biểu thức sau:

a) $(x-2y)^4$; b) $(3x-y)^5$.

Giải

Ta có:

a) $(x-2y)^4 = [x + (-2y)]^4 = x^4 + 4 \cdot x^3 \cdot (-2y) + 6 \cdot x^2 \cdot (-2y)^2 + 4 \cdot x \cdot (-2y)^3 + (-2y)^4$

$= x^4 - 8x^3y + 24x^2y^2 - 32xy^3 + 16y^4.$

b) $(3x-y)^5 = [3x + (-y)]^5$

$= (3x)^5 + 5 \cdot (3x)^4 \cdot (-y) + 10 \cdot (3x)^3 \cdot (-y)^2 + 10 \cdot (3x)^2 \cdot (-y)^3 + 5 \cdot (3x) \cdot (-y)^4 + (-y)^5$

$= 243x^5 - 405x^4y^3 + 270x^3y^2 - 90x^2y^3 + 15xy^4 - y^5.$

1 Khai triển biểu thức $(2+x)^4$.

2 Khai triển biểu thức $(2-3y)^4$.

3 Tính:

a) $C_4^0 + C_4^1 + C_4^2 + C_4^3 + C_4^4$;

b) $C_5^0 - C_5^1 + C_5^2 - C_5^3 + C_5^4 - C_5^5$.

BÀI TẬP

1. Khai triển các biểu thức sau:

a) $(2x+1)^4$; b) $(3y-2)^4$; c) $\left(x+\frac{1}{2}\right)^4$; d) $\left(x-\frac{1}{3}\right)^4$.

2. Khai triển các biểu thức sau:

a) $(x+1)^5$; b) $(x-3y)^5$.

3. Xác định hệ số của x^4 trong khai triển biểu thức $(3x+2)^5$.

4. Cho $\left(1-\frac{1}{2}x\right)^5 = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + a_5x^5$. Tính:

a) a_3;

b) $a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5$.

5. Cho tập hợp A có 5 phần tử. Số tập hợp con của A là bao nhiêu?

BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG V

1. a) Có bao nhiêu cách xếp 20 học sinh theo một hàng dọc?

A. 20^{20}. B. $20!$. C. 20. D. 1.

b) Số cách chọn ra 3 học sinh từ một lớp có 40 học sinh là:

A. A_{40}^{3}. B. 40^3. C. 3^{40}. D. C_{40}^{3}.

2. Bạn Dương có 2 chiếc quần gồm: một quần màu xanh và một quần màu đen; 3 chiếc áo gồm: một áo màu nâu, một áo màu xanh và một áo màu vàng; 2 đôi giày gồm: một đôi giày màu đen và một đôi giày màu đỏ. Bạn Dương muốn chọn một bộ quần áo và một đôi giày để đi tham quan. Bằng cách vẽ sơ đồ hình cây, tính số cách chọn một bộ quần áo và một đôi giày cho bạn Dương.

3. Trong mặt phẳng, cho hai đường thẳng song song a và b. Cho 3 điểm trên đường thẳng a và 4 điểm trên đường thẳng b. Có bao nhiêu tam giác có cả 3 đỉnh là 3 điểm trong 7 điểm nói trên?

4. Trong mặt phẳng, cho 6 đường thẳng song song và 8 đường thẳng vuông góc với 6 đường thẳng đó. Có bao nhiêu hình chữ nhật được tạo thành?

5. Khai triển các biểu thức sau:

a) $(4y - 1)^4$; b) $(3x + 4y)^5$.

6. Mật khẩu của máy tính là một dãy các kí tự (có kể thứ tự từ trái qua phải) được chọn từ: 10 chữ số, 26 chữ cái in thường cùng với 26 chữ cái in hoa và 10 kí tự đặc biệt. Bạn Ngân muốn lập một mật khẩu của máy tính có độ dài là 8 kí tự bao gồm: 4 kí tự đầu tiên là 4 chữ số khác nhau, 2 kí tự tiếp theo là chữ cái in thường, 1 kí tự tiếp theo nữa là chữ cái in hoa, kí tự cuối cùng là kí tự đặc biệt. Bạn Ngân có bao nhiêu cách lập mật khẩu của máy tính?

7. Một trường trung học phổ thông tổ chức cuộc thi chạy tiếp sức giữa các lớp với nội dung 4×100 m và yêu cầu mỗi đội gồm 2 nam, 2 nữ. Bạn An được giáo viên giao nhiệm vụ chọn ra 4 bạn và sắp xếp thứ tự chạy của các bạn đó để đăng kí dự thi. Bạn An có bao nhiêu cách lập ra một đội thi đủ điều kiện đăng kí? Biết lớp bạn An có 22 nam và 17 nữ.

8. Bác Thảo muốn mua 2 chiếc máy tính để phục vụ công việc. Người bán hàng giới thiệu cho bác 3 hãng máy tính để tham khảo: hãng thứ nhất có 4 loại máy tính phù hợp, hãng thứ hai có 5 loại máy tính phù hợp, hãng thứ ba có 7 loại máy tính phù hợp. Bác Thảo có bao nhiêu cách chọn 2 máy tính dùng cho công việc?

CHƯƠNG VI

MỘT SỐ YẾU TỐ THỐNG KÊ VÀ XÁC SUẤT

Trong chương này, chúng ta sẽ tìm hiểu những nội dung sau: số gần đúng, sai số; các số đặc trưng đo xu thế trung tâm và đo mức độ phân tán cho mẫu số liệu không ghép nhóm; xác suất của biến cố.

§1 SỐ GẦN ĐÚNG. SAI SỐ

(*Nguồn: https://shutterstock.com*)

Trái Đất với tên gọi "Hành tinh xanh" là ngôi nhà chung của nhân loại. Trong Hệ Mặt Trời, Trái Đất là hành tinh thứ ba tính từ Mặt Trời, đồng thời cũng là hành tinh lớn nhất trong các hành tinh đất đá xét về bán kính, khối lượng và mật độ vật chất.

Trái Đất có diện tích toàn bộ bề mặt là 510,072 triệu km^2.
(*Nguồn: https://vi.wikipedia.org*)

Con số 510,072 (triệu km^2) *là số chính xác hay số gần đúng?*

I. SỐ GẦN ĐÚNG

1 Hoá đơn tiền điện tháng 4/2021 của gia đình bác Mai là 763 951 đồng. Trong thực tế, bác Mai đã thanh toán (hoá đơn) bằng tiền mặt cho người thu tiền điện số tiền là 764 000 đồng. Tại sao bác Mai không thể thanh toán bằng tiền mặt cho người thu tiền điện số tiền chính xác là 763 951 đồng?

Trong đo đạc và tính toán thực tiễn, đôi khi ta không sử dụng được các số chính xác (chẳng hạn số 763 951 ở trên) mà phải sử dụng những số gần đúng với số chính xác.

> Trong đo đạc và tính toán, ta thường chỉ nhận được các số gần đúng.

II. SAI SỐ CỦA SỐ GẦN ĐÚNG

1. Sai số tuyệt đối

2 Một bồn hoa có dạng hình tròn với bán kính là 0,8 m.

a) Viết công thức tính diện tích S của bồn hoa theo π và bán kính 0,8 m.

b) Khi tính diện tích của bồn hoa, bạn Ngân lấy một giá trị gần đúng của π là 3,1 và được kết quả là:

$$3,1\ .\ (0,8)^2 = 1,984\ (\text{m}^2).$$

Giá trị $|S - 1,984|$ biểu diễn điều gì?

(*Nguồn: https://commons.m.wikimedia.org*)

Nếu a là số gần đúng của số đúng $\overline{a}$ thì $\Delta_a = |\overline{a} - a|$ được gọi là *sai số tuyệt đối* của số gần đúng a (*Hình 1*).

Hình 1

Ví dụ 1 Một bồn hoa có dạng hình tròn với bán kính là 0,8 m. Hai bạn Ngân và Ánh cùng muốn tính diện tích S của bồn hoa đó. Bạn Ngân lấy một giá trị gần đúng của π là 3,1 và được kết quả là S_1. Bạn Ánh lấy một giá trị gần đúng của π là 3,14 và được kết quả là S_2. So sánh sai số tuyệt đối Δ_{S_1} của số gần đúng S_1 và sai số tuyệt đối Δ_{S_2} của số gần đúng S_2. Bạn nào cho kết quả chính xác hơn?

Giải

Ta có: $S_1 = 3,1\ .\ (0,8)^2 = 1,984\ (\text{m}^2)$;

$S_2 = 3,14\ .\ (0,8)^2 = 2,0096\ (\text{m}^2)$.

Ta thấy: $3,1 < 3,14 < \pi$ nên $3,1\ .\ (0,8)^2 < 3,14\ .\ (0,8)^2 < \pi\ .\ (0,8)^2$ tức là $S_1 < S_2 < S$.

Suy ra $\Delta_{S_2} = |S - S_2| < |S - S_1| = \Delta_{S_1}$. Vậy bạn Ánh cho kết quả chính xác hơn.

Chú ý: Sai số tuyệt đối của số gần đúng nhận được trong một phép đo đạc, tính toán càng bé thì kết quả của phép đo đạc, tính toán đó càng chính xác.

2. Độ chính xác của một số gần đúng

3 Hãy ước lượng sai số tuyệt đối Δ_{S_1} ở *Ví dụ 1*.

Để ước lượng sai số tuyệt đối đó, ta làm như sau:

Do $3{,}1 < \pi < 3{,}15$ nên $3{,}1 \,.\, (0{,}8)^2 < \pi \,.\, (0{,}8)^2 < 3{,}15 \,.\, (0.8)^2$. Suy ra $1{,}984 < S < 2{,}016$.

Vậy $\Delta_{S_1} = \left|S - S_1\right| < 2{,}016 - 1{,}984 = 0{,}032$.

Ta nói: Kết quả của bạn Ngân có sai số tuyệt đối không vượt quá 0,032 hay có độ chính xác là 0,032.

Nhận xét: Giả sử a là số gần đúng của số đúng $\overline{a}$ sao cho $\Delta_a = \left|\overline{a} - a\right| \le d$.

Khi đó: $\Delta_a = \left|\overline{a} - a\right| \le d \Leftrightarrow -d \le \overline{a} - a \le d \Leftrightarrow a - d \le \overline{a} \le a + d$.

Một cách tổng quát:

Ta nói a là số gần đúng của số đúng $\overline{a}$ với độ chính xác d nếu $\Delta_a = \left|\overline{a} - a\right| \le d$ và quy ước viết gọn là $\overline{a} = a \pm d$.

Nhận xét: Nếu $\Delta_a \le d$ thì số đúng $\overline{a}$ nằm trong đoạn $[a - d\,;\, a + d]$. Bởi vậy, d càng nhỏ thì độ sai lệch của số gần đúng a so với số đúng $\overline{a}$ càng ít. Điều đó giải thích vì sao d được gọi là độ chính xác của số gần đúng.

Ví dụ 2 Hãy ước lượng sai số tuyệt đối Δ_{S_2} ở *Ví dụ 1*.

Giải

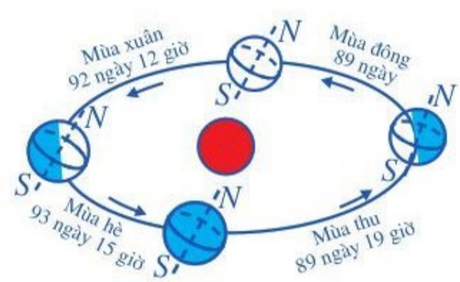
Do $3{,}14 < \pi < 3{,}15$ nên $3{,}14 \,.\, (0{,}8)^2 < \pi \,.\, (0{,}8)^2 < 3{,}15 \,.\, (0{,}8)^2$. Suy ra $2{,}0096 < S < 2{,}016$.

Vậy $\Delta_{S_2} = \left|S - S_2\right| < 2{,}016 - 2{,}0096 = 0{,}0064$.

Ta nói: Kết quả của bạn Ánh có sai số tuyệt đối không vượt quá 0,0064 hay có độ chính xác là 0,0064. Khi đó ta có thể viết $S = 2{,}0096 \pm 0{,}0064$.

3. Sai số tương đối

4 Các nhà thiên văn tính được thời gian để Trái Đất quay một vòng xung quanh Mặt Trời là 365 ngày $\pm \frac{1}{4}$ ngày. Bạn Hùng tính thời gian đi bộ một vòng xung quanh sân vận động của trường khoảng 15 phút $\pm$ 1 phút. Trong hai phép đo trên, phép đo nào chính xác hơn?



Phép đo của các nhà thiên văn có sai số tuyệt đối không vượt quá $\frac{1}{4}$ ngày, có nghĩa là không vượt quá 360 phút. Phép đo của Hùng có sai số tuyệt đối không vượt quá 1 phút. Nếu chỉ so sánh 360 phút và 1 phút thì có thể dẫn đến hiểu rằng phép đo của bạn Hùng chính xác hơn phép đo của các nhà thiên văn. Tuy nhiên, $\frac{1}{4}$ ngày hay 360 phút là độ chính xác của phép đo một chuyển động trong 365 ngày, còn 1 phút là độ chính xác của phép đo một chuyển động trong 15 phút. So sánh hai tỉ số $\frac{\frac{1}{4}}{365} = \frac{1}{1\,460} = 0{,}0006849...$ và $\frac{1}{15} = 0{,}0666...$, ta thấy rằng phép đo của các nhà thiên văn chính xác hơn nhiều.

Ví dụ trên cho ta thấy: Sai số tuyệt đối của số gần đúng nhận được trong một phép đo đạc, tính toán đôi khi không phản ánh đầy đủ tính chính xác của phép đo đạc, tính toán đó.

Vì vậy, ngoài sai số tuyệt đối Δ_a của số gần đúng a, người ta còn xét một tỉ số khác liên quan đến sai số.

Tỉ số $\delta_a = \frac{\Delta_a}{|a|}$ được gọi là *sai số tương đối* của số gần đúng a.

Nhận xét

• Nếu $\overline{a} = a \pm d$ thì $\Delta_a \leq d$. Do đó $\delta_a \leq \frac{d}{|a|}$. Vì vậy, nếu $\frac{d}{|a|}$ càng bé thì chất lượng của phép đo đạc, tính toán càng cao.

• Người ta thường viết sai số tương đối dưới dạng phần trăm. Chẳng hạn, trong phép đo thời gian Trái Đất quay một vòng xung quanh Mặt Trời thì sai số tương đối không vượt quá

$$\frac{\frac{1}{4}}{365} = \frac{1}{1\,460} \approx 0{,}068\%.$$

III. SỐ QUY TRÒN. QUY TRÒN SỐ GẦN ĐÚNG

5 Trước hết, ta nêu lại quy tắc làm tròn (còn gọi là quy tròn) số nguyên hoặc số thập phân đến một hàng nào đó (gọi là hàng quy tròn) như sau:

• Nếu chữ số ngay sau hàng quy tròn nhỏ hơn 5 thì ta chỉ việc thay thế chữ số đó và các chữ số bên phải nó bởi 0.

• Nếu chữ số ngay sau hàng quy tròn lớn hơn hoặc bằng 5 thì ta cũng làm như trên nhưng cộng thêm một đơn vị vào chữ số của hàng quy tròn.

Sử dụng quy tắc trên, hãy quy tròn số:

a) 123 456 đến hàng trăm;

b) 1,58 đến hàng phần mười;

c) 3,14159265... đến hàng phần trăm.

Nhận xét: Khi quy tròn số 123 456 đến hàng trăm ta được số 123 500. Số 123 500 gọi là *số quy tròn* của số ban đầu.

Khi quy tròn một số nguyên hoặc một số thập phân đến một hàng nào đó thì số nhận được gọi là *số quy tròn* của số ban đầu.

6 Quy tròn số 3,141 đến hàng phần trăm rồi tính sai số tuyệt đối của số quy tròn.

Khi quy tròn số 3,141 đến hàng phần trăm ta được số 3,14 và sai số tuyệt đối của số quy tròn là $|3,141 - 3,14| = 0,001 < 0,005$. Do vậy 3,14 là số gần đúng của 3,141 với độ chính xác 0,005.

Nhận xét: Khi thay số đúng bởi số quy tròn đến một hàng nào đó thì sai số tuyệt đối của số quy tròn không vượt quá nửa đơn vị của hàng quy tròn. Như vậy, độ chính xác của số quy tròn bằng nửa đơn vị của hàng quy tròn.

Từ nhận xét trên ta có thể viết số quy tròn của số gần đúng căn cứ vào độ chính xác cho trước.

Ví dụ 3 Viết số quy tròn của mỗi số sau với độ chính xác d:

a) 2 841 331 với $d = 500$;

b) 4,1463 với $d = 0,05$;

c) 1,4142135... với $d = 0,005$.

Giải

a) Vì độ chính xác $d = 500$ nên ta quy tròn số 2 841 331 đến hàng nghìn theo quy tắc ở trên.

Vậy số quy tròn của số 2 841 331 với độ chính xác $d = 500$ là 2 841 000.

b) Vì độ chính xác $d = 0,05$ nên ta quy tròn số 4,1463 đến hàng phần mười theo quy tắc ở trên.

Vậy số quy tròn của số 4,1463 với độ chính xác $d = 0,05$ là 4,1.

c) Vì độ chính xác $d = 0,005$ nên ta quy tròn số 1,4142135... đến hàng phần trăm theo quy tắc ở trên.

Vậy số quy tròn của số 1,4142135... với độ chính xác $d = 0,005$ là 1,41.

1 Viết số quy tròn của mỗi số sau với độ chính xác d:

a) 28,4156 với $d = 0,005$;

b) 1,7320508... với $d = 0,0005$.

7 Qua *Ví dụ 3*, ta thấy nếu số đúng là số nguyên hoặc số thập phân thì ta có thể tìm dễ dàng số gần đúng với độ chính xác cho trước bằng cách quy tròn về hàng thích hợp. Tuy nhiên, việc biểu diễn số thực về dạng số nguyên hoặc số thập phân trong thực tiễn là không đơn giản. Ngày nay, ta có thể sử dụng máy tính cầm tay hoặc các phương tiện tính toán hiện đại để giải quyết vấn đề đó.

Sử dụng máy tính cầm tay, tính $3^7 . \sqrt{14}$ (trong kết quả lấy bốn chữ số ở phần thập phân).

Để thực hiện phép tính trên ra kết quả có bốn chữ số ở phần thập phân, ta có thể làm như sau:

- Ấn liên tiếp $\boxed{3}\ \boxed{x^{\square}}\ \boxed{7}\ \boxed{\blacktriangleright}\ \boxed{\times}\ \boxed{\sqrt{\square}}\ \boxed{1}\ \boxed{4}\ \boxed{=}$
- Tiếp tục ấn lần lượt $\boxed{\text{SHIFT}}\ \boxed{\text{SETUP}}\ \boxed{6}$ thì màn hình hiện ra Fix 0 ~ 9?

Ấn tiếp $\boxed{4}$ để lấy bốn chữ số thập phân. Kết quả hiện ra màn hình là 8183.0047.

2 Sử dụng máy tính cầm tay, tính $\sqrt[3]{15} : 5 - 2$ (trong kết quả lấy hai chữ số ở phần thập phân).

Ví dụ 4 Một tờ giấy A4 có dạng hình chữ nhật với chiều dài, chiều rộng lần lượt là 29,7 cm và 21 cm. Tính độ dài đường chéo của tờ giấy A4 đó và xác định độ chính xác của kết quả tìm được.

Giải

Gọi x là độ dài đường chéo của tờ giấy A4 đã cho. Theo định lí Pythagore, ta có:

$$x = \sqrt{29,7^2 + 21^2} = \sqrt{882,09 + 441} = \sqrt{1\,323,09} = 36,3743...$$

Nếu lấy giá trị gần đúng của x là 36,37 ta có: $36,37 < x < 36,375$.

Suy ra $|x - 36,37| < 36,375 - 36,37 = 0,005$.

Vậy độ dài đường chéo của tờ giấy A4 đã cho là $x \approx 36,37$ và độ chính xác của kết quả tìm được là 0,005, hay nói cách khác $x = 36,37 \pm 0,005$.

BÀI TẬP

1. Quy tròn số – 3,2475 đến hàng phần trăm. Số gần đúng nhận được có độ chính xác là bao nhiêu?

2. Viết số quy tròn của mỗi số sau với độ chính xác d:

a) 30,2376 với $d = 0,005$; b) 2,3512082... với $d = 0,0005$.

3. Biết $\sqrt{2} = 1,41421356237...$ Viết số gần đúng của $\sqrt{2}$ theo nguyên tắc quy tròn lần lượt với hai, ba, bốn chữ số thập phân và ước lượng sai số tuyệt đối.

4. Ta đã biết 1 inch (kí hiệu là in) là 2,54 cm. Màn hình của một chiếc ti vi có dạng hình chữ nhật với độ dài đường chéo là 32 in, tỉ số giữa chiều dài và chiều rộng của màn hình là 16 : 9. Tìm một giá trị gần đúng (theo đơn vị in) của chiều dài ti vi và tìm sai số tuyệt đối, độ chính xác của số gần đúng đó.

5. Hãy tìm hiểu khối lượng của Trái Đất, Mặt Trời và viết kết quả dưới dạng số gần đúng.

§2 CÁC SỐ ĐẶC TRƯNG ĐO XU THẾ TRUNG TÂM CHO MẪU SỐ LIỆU KHÔNG GHÉP NHÓM

Việt Nam	**6 – 0**	Brunei
Việt Nam	**6 – 1**	Lào
Việt Nam	**2 – 1**	Indonesia
Singapore	**0 – 1**	Việt Nam
Việt Nam	**2 – 2**	Thái Lan
Việt Nam	**4 – 0**	Campuchia
Indonesia	**0 – 3**	Việt Nam

Bảng 1. Bảng kết quả thi đấu bóng đá của đội tuyển bóng đá nam U22 Việt Nam tại SEA Games 30

SEA Games 30 đã đi vào lịch sử của Thể thao Việt Nam. Lần đầu tiên, Việt Nam cùng được Huy chương Vàng cả bóng đá nam và bóng đá nữ. Đặc biệt, số bàn thắng trung bình của đội tuyển bóng đá nam U22 Việt Nam trong mỗi trận đấu là 3,43.

Số bàn thắng trung bình trong mỗi trận đấu được tính như thế nào?

I. SỐ TRUNG BÌNH CỘNG (SỐ TRUNG BÌNH)

1. Định nghĩa

1 Kết quả đo chiều cao (đơn vị: xăng-ti-mét) của 5 bạn nam tổ I là:

165   172   172   171   170

Tính trung bình cộng của 5 số trên.

Số trung bình cộng của một mẫu n số liệu thống kê bằng tổng của các số liệu chia cho số các số liệu đó. Số trung bình cộng $\overline{x}$ của mẫu số liệu $x_1, x_2, ..., x_n$ là:

$$\overline{x} = \frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n}.$$

Ví dụ 1 Kết quả 4 lần kiểm tra môn Toán của bạn Hoa là: 7   9   8   9

Tính số trung bình cộng $\overline{x}$ của mẫu số liệu trên.

Giải

Số trung bình cộng $\overline{x}$ của mẫu số liệu trên là:

$$\overline{x} = \frac{7 + 9 + 8 + 9}{4} = \frac{33}{4} = 8,25.$$

1 Quan sát *Bảng 1* và giải thích tại sao số bàn thắng trung bình của đội tuyển bóng đá nam U22 Việt Nam trong mỗi trận đấu là 3,43.

Nhận xét: Công thức tính số trung bình cộng $\overline{x}$ khi có các số liệu thống kê bằng nhau có thể viết lại ở dạng:

$$\overline{x} = \frac{7+8+2.9}{1+1+2} = \frac{33}{4} = 8{,}25.$$

Ta có thể tính số trung bình cộng theo các công thức sau:

• Số trung bình cộng $\overline{x}$ của mẫu số liệu thống kê trong bảng phân bố tần số là:

$$\overline{x} = \frac{n_1x_1 + n_2x_2 + ... + n_kx_k}{n_1 + n_2 + ... + n_k}.$$

Giá trị	x_1	x_2	...	x_k
Tần số	n_1	n_2	...	n_k

• Số trung bình cộng $\overline{x}$ của mẫu số liệu thống kê trong bảng phân bố tần số tương đối là:

$$\overline{x} = f_1x_1 + f_2x_2 + ... + f_kx_k,$$

trong đó $f_1 = \frac{n_1}{n}$, $f_2 = \frac{n_2}{n}$, ..., $f_k = \frac{n_k}{n}$,

với $n = n_1 + n_2 + ... + n_k$.

Giá trị	x_1	x_2	...	x_k
Tần số tương đối	f_1	f_2	...	f_k

2. Ý nghĩa

Trong thực tiễn, để tìm hiểu một đối tượng thống kê, ta đưa ra tiêu chí thống kê và tiến hành thu thập nhiều lần số liệu thống kê theo tiêu chí đó, tạo thành mẫu số liệu. Căn cứ vào mẫu số liệu đó, ta rút ra những kết luận có ích về đối tượng thống kê. Để kết luận rút ra phản ánh đúng đắn bản chất của đối tượng, ta cần nhận biết được hình thái và xu thế thay đổi của mẫu số liệu. Với cách nhìn nhận như thế, số trung bình cộng của mẫu số liệu có ý nghĩa sau:

Khi các số liệu trong mẫu ít sai lệch với số trung bình cộng, ta có thể giải quyết được vấn đề trên bằng cách lấy số trung bình cộng làm đại diện cho mẫu số liệu.

Chẳng hạn, để dự báo lượng mưa trong tháng 8 tại Hà Nội người ta tiến hành đo lượng mưa của từng ngày trong tháng 8 tại Hà Nội, ta được mẫu số liệu gồm 31 số liệu. Số trung bình cộng của mẫu số liệu đó được xem như lượng mưa trung bình tháng 8 của Hà Nội. Thống kê lượng mưa trung bình tháng 8 của Hà Nội trong nhiều năm liên tiếp sẽ cho ta những dự báo (ngày càng chính xác hơn) lượng mưa trung bình tháng 8 của Hà Nội trong những năm sắp tới.

II. TRUNG VỊ

1. Định nghĩa

2 Điểm kiểm tra môn Toán của một nhóm gồm 9 học sinh như sau:

1 1 3 6 7 8 8 9 10

Tính số trung bình cộng của mẫu số liệu trên và nêu nhận xét.

Nhận xét: Số trung bình cộng của mẫu số liệu trên là

$$\overline{x} = \frac{1 + 1 + 3 + 6 + 7 + 8 + 8 + 9 + 10}{9} \approx 5,9.$$

Quan sát mẫu số liệu trên, ta thấy nhiều số liệu có sự chênh lệch lớn so với số trung bình cộng. Vì vậy, ta không thể lấy số trung bình cộng làm đại diện cho mẫu số liệu mà ta phải chọn số đặc trưng khác thích hợp hơn. Cụ thể, ta chọn số đứng giữa mẫu số liệu trên, tức là số 7, làm đại diện cho mẫu số liệu đó.

Sắp thứ tự mẫu số liệu gồm n số liệu thành một dãy không giảm (hoặc không tăng).

- Nếu n là lẻ thì số liệu đứng ở vị trí thứ $\frac{n+1}{2}$ (số đứng chính giữa) gọi là *trung vị*.
- Nếu n là chẵn thì số trung bình cộng của hai số liệu đứng ở vị trí thứ $\frac{n}{2}$ và $\frac{n}{2} + 1$ gọi là *trung vị*.

Trung vị kí hiệu là M_e.

Ví dụ 2 Thời gian (tính theo phút) mà 10 người đợi ở bến xe buýt là:

2,8   1,2   3,4   14,6   1,3   2,5   4,2   1,9   3,5   0,8

Tìm trung vị của mẫu số liệu trên.

Giải

Bước 1. Sắp xếp các số liệu của mẫu trên theo thứ tự không giảm:

0,8   1,2   1,3   1,9   2,5   2,8   3,4   3,5   4,2   14,6

Bước 2. Xác định xem số các số liệu là số chẵn hay số lẻ để tìm trung vị:

Mẫu số liệu trên có 10 số. Số thứ năm và số thứ sáu lần lượt là 2,5 và 2,8.

Vì vậy $M_e = \frac{2,5 + 2,8}{2} = 2,65$ (phút).

2 Nhiệt độ buổi tối ở Hà Nội ngày 21/11/2021 lúc 20 giờ, 21 giờ, 22 giờ, 23 giờ lần lượt là 26, 25, 23, 23 (đơn vị: ^{o}C).

(Nguồn: https://accuweather.com)

Tìm trung vị của mẫu số liệu trên.

Nhận xét

- Trung vị không nhất thiết là một số trong mẫu số liệu và dễ tính toán.
- Khi các số liệu trong mẫu không có sự chênh lệch lớn thì số trung bình cộng và trung vị xấp xỉ nhau.

2. Ý nghĩa

Nếu những số liệu trong mẫu có sự chênh lệch lớn thì ta nên chọn thêm trung vị làm đại diện cho mẫu số liệu đó nhằm điều chỉnh một số hạn chế khi sử dụng số trung bình cộng. Những kết luận về đối tượng thống kê rút ra khi đó sẽ tin cậy hơn.

Chẳng hạn, số trung bình cộng của mẫu số liệu thống kê trong *Ví dụ 2* là:

$$\overline{x} = \frac{2,8 + 1,2 + 3,4 + 14,6 + 1,3 + 2,5 + 4,2 + 1,9 + 3,5 + 0,8}{10} = 3,62 \text{ (phút)}.$$

Vì thế, nếu chọn thêm trung vị $M_e = 2,65$ (phút) làm đại diện cho mẫu số liệu đó thì kết luận về thời gian đợi ở bến xe buýt sẽ tin cậy hơn.

III. TỨ PHÂN VỊ

1. Định nghĩa

3 Xét mẫu số liệu được xếp theo thứ tự tăng dần:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11

Tìm trung vị của mẫu số liệu trên.

Nhận xét

Trung vị của mẫu số liệu trên là 6. Tuy nhiên, nhiều số liệu trong mẫu vẫn có sự chênh lệch lớn so với 6, chẳng hạn: 1, 2, 10, 11. Vì thế, ta cần chọn thêm những phần tử đặc trưng cho mẫu số liệu.

Nửa dãy phía dưới số 6 (tức là những số nhỏ hơn 6) bao gồm 1, 2, 3, 4, 5, có trung vị là 3.

Nửa dãy phía trên số 6 (tức là những số lớn hơn 6) bao gồm 7, 8, 9, 10, 11, có trung vị là 9.

Ba phần tử 3, 6, 9 chia mẫu số liệu thành bốn phần có số lượng phần tử bằng nhau là $\{1; 2\}, \{4; 5\}, \{7; 8\}, \{10; 11\}$.

Ta chọn bộ ba số 3, 6, 9 là bộ số đặc trưng cho mẫu số liệu.

Sắp thứ tự mẫu số liệu gồm n số liệu thành một dãy không giảm.

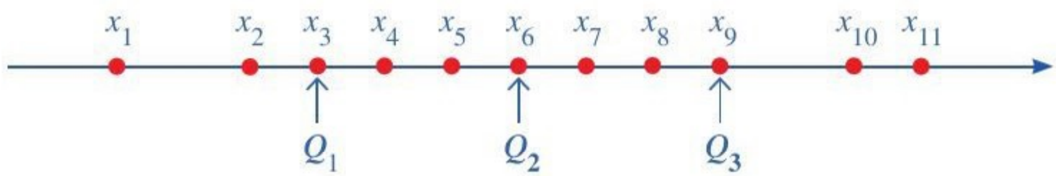
Tứ phân vị của mẫu số liệu trên là bộ ba giá trị: tứ phân vị thứ nhất, tứ phân vị thứ hai và tứ phân vị thứ ba; ba giá trị này chia mẫu số liệu thành bốn phần có số lượng phần tử bằng nhau.

- Tứ phân vị thứ hai Q_2 bằng trung vị.

• Nếu n là số chẵn thì tứ phân vị thứ nhất Q_1 bằng trung vị của nửa dãy phía dưới và tứ phân vị thứ ba Q_3 bằng trung vị của nửa dãy phía trên.

• Nếu n là số lẻ thì tứ phân vị thứ nhất Q_1 bằng trung vị của nửa dãy phía dưới (không bao gồm Q_2) và tứ phân vị thứ ba Q_3 bằng trung vị của nửa dãy phía trên (không bao gồm Q_2).

Ta minh họa tứ phân vị của mẫu số liệu gồm 11 số liệu trên trục số như sau:



Ví dụ 3 Tìm tứ phân vị của mẫu số liệu:

21 35 17 43 8 59 72 119

Biểu diễn tứ phân vị đó trên trục số.

Giải

Mẫu số liệu trên được sắp xếp theo thứ tự tăng dần như sau:

8 17 21 35 43 59 72 119

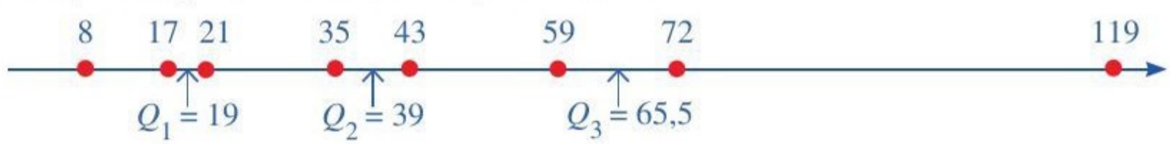
Trung vị của mẫu số liệu trên là: $\frac{35+43}{2} = 39$.

Trung vị của dãy 8, 17, 21, 35 là: $\frac{17+21}{2} = 19$.

Trung vị của dãy 43, 59, 72, 119 là: $\frac{59+72}{2} = 65{,}5$.

Vậy $Q_1 = 19$, $Q_2 = 39$, $Q_3 = 65{,}5$.

Tứ phân vị đó được biểu diễn trên trục số như sau:



3 Tìm tứ phân vị của mẫu số liệu:

11 48 62 81 93 99 127

Biểu diễn tứ phân vị trên trục số.

2. Ý nghĩa

• Trong thực tiễn, có những mẫu số liệu mà nhiều số liệu trong mẫu đó vẫn còn sự chênh lệch lớn so với trung vị. Ta nên chọn thêm những số khác cùng làm đại diện cho mẫu đó. Bằng cách lấy thêm trung vị của từng dãy số liệu tách ra bởi trung vị của mẫu nói trên, ta nhận được tứ phân vị đại diện cho mẫu số liệu đó.

• Bộ ba giá trị Q_1, Q_2, Q_3 trong tứ phân vị phản ánh độ phân tán của mẫu số liệu. Nhưng mỗi giá trị Q_1, Q_2, Q_3 lại đo xu thế trung tâm của phần số liệu tương ứng của mẫu đó.

IV. MỐT

1. Định nghĩa

4 Bác Tâm khai trương cửa hàng bán áo sơ mi nam. Số áo cửa hàng đã bán ra trong tháng đầu tiên được thống kê trong bảng tần số sau:

Cỡ áo	37	38	39	40	41	42	43
Tần số (Số áo bán được)	15	46	62	81	51	20	3

Cỡ áo nào cửa hàng bác Tâm bán được nhiều nhất trong tháng đầu tiên?

Ta có định nghĩa sau:

Mốt của mẫu số liệu là giá trị có tần số lớn nhất trong bảng phân bố tần số và kí hiệu là M_o.

Chú ý: Một mẫu số liệu có thể có một hoặc nhiều mốt.

Ví dụ 4 Mốt trong bảng tần số thống kê số áo bán ra trong tháng đầu tiên của cửa hàng ở Hoạt động 4 là bao nhiêu?

Giải

Vì tần số lớn nhất là 81 và 81 tương ứng với cỡ áo 40 nên mốt của bảng trên là 40.

4 Kết quả thi thử môn Toán của lớp 10A như sau:

5 6 7 5 6 9 10 8 5 5 4 5 4 5 7 4 5 8 9 10

5 4 5 6 5 7 5 8 4 9 5 6 5 6 8 8 7 9 7 9

a) Mốt của mẫu số liệu trên là bao nhiêu?

b) Tính tỉ lệ số học sinh lớp 10A đạt điểm từ 8 trở lên. Tỉ lệ đó phản ánh điều gì?

2. Ý nghĩa

Mốt của một mẫu số liệu đặc trưng cho số lần lặp đi lặp lại nhiều nhất tại một vị trí của mẫu số liệu đó. Dựa vào mốt, ta có thể đưa ra những kết luận (có ích) về đối tượng thống kê.

Chẳng hạn, trong *Ví dụ 4*, mốt trong bảng tần số thống kê số áo bán ra trong tháng đầu tiên của cửa hàng là 40. Do vậy, bác Tâm nên nhập về nhiều hơn cỡ áo 40 để bán trong tháng tiếp theo.

V. TÍNH HỢP LÍ CỦA SỐ LIỆU THỐNG KÊ

5 Đọc kĩ các nội dung sau:

Sau khi thu thập, tổ chức, phân loại và biểu diễn số liệu bằng bảng hoặc biểu đồ, ta cần phân tích và xử lí các số liệu đó để xem xét tính hợp lí của số liệu thống kê, đặc biệt chỉ ra được những số liệu bất thường (hay còn gọi là dị biệt, trong tiếng Anh là Outliers). Ta có thể sử dụng các số liệu đặc trưng đo xu thế trung tâm cho mẫu số liệu không ghép nhóm để thực hiện điều đó.

Ví dụ 5 Mẫu số liệu sau ghi lại cân nặng của 40 bạn học sinh lớp 10 của một trường trung học phổ thông (đơn vị: ki-lô-gam):

30	32	45	45	45	47	48	44	44	49
49	49	52	51	50	50	53	55	54	54
54	56	57	57	58	58,5	68,5	60	60	60
60	63,5	63	62	69	58,5	88	85	72	71

a) Xác định trung vị, tứ phân vị của mẫu số liệu trên.

b) Từ kết quả câu a), bước đầu xác định những số liệu bất thường trong mẫu số liệu trên.

Giải

a) Mẫu số liệu trên được sắp xếp theo thứ tự tăng dần như sau:

30	32	44	44	45	45	45	47	48	49
49	49	50	50	51	52	53	54	54	54
55	56	57	57	58	58,5	58,5	60	60	60
60	62	63	63,5	68,5	69	71	72	85	88

- Trung vị của mẫu số liệu trên là: $\dfrac{54+55}{2} = 54,5$.
- Trung vị của nửa dãy phía dưới 30 32 44 44 45 45 45 47 48 49 49 49 50 50 51 52 53 54 54 54 là: $\dfrac{49+49}{2} = 49$.
- Trung vị của nửa dãy phía trên 55 56 57 57 58 58,5 58,5 60 60 60 60 62 63 63,5 68,5 69 71 72 85 88 là: $\dfrac{60+60}{2} = 60$.

Vậy $Q_1 = 49$; $Q_2 = 54,5$; $Q_3 = 60$.

b) Dựa vào trung vị, tứ phân vị của mẫu số liệu đã cho, bước đầu ta có thể thấy những số liệu bất thường trong mẫu số liệu đó là: 30 32 85 88.

Chú ý: Trong thực tiễn, những số liệu bất thường của mẫu số liệu được xác định bằng những công cụ toán học sâu sắc hơn.

BÀI TẬP

1. Chiều cao (đơn vị: xăng-ti-mét) của các bạn tổ I ở lớp 10A lần lượt là:

165 155 171 167 159 175 165 160 158

Đối với mẫu số liệu trên, hãy tìm:

a) Số trung bình cộng; b) Trung vị; c) Mốt; d) Tứ phân vị.

2. Số đôi giày bán ra trong Quý IV năm 2020 của một cửa hàng được thống kê trong bảng tần số sau:

Cỡ giày	**37**	**38**	**39**	**40**	**41**	**42**	**43**	**44**
Tần số (Số đôi giày bán được)	40	48	52	70	54	47	28	3

a) Mốt của mẫu số liệu trên là bao nhiêu?

b) Cửa hàng đó nên nhập về nhiều hơn cỡ giày nào để bán trong tháng tiếp theo?

3. *Bảng 2* cho biết nhiệt độ trung bình các tháng trong năm ở Hà Nội.

Tháng	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**
Nhiệt độ (^oC)	16,4	17,0	20,2	23,7	27,3	28,8	28,9	28,2	27,2	24,6	21,4	18,2

(*Nguồn: Tập bản đồ Địa lí 6, NXB Giáo dục Việt Nam, 2020*)

Bảng 2

a) Nhiệt độ trung bình trong năm ở Hà Nội là bao nhiêu?

b) Nhiệt độ trung bình của tháng có giá trị thấp nhất là bao nhiêu độ C? Cao nhất là bao nhiêu độ C?

4. *Bảng 3* cho biết tổng diện tích rừng từ năm 2008 đến năm 2019 ở nước ta.

Năm	**2008**	**2009**	**2010**	**2011**	**2012**	**2013**	**2014**	**2015**	**2016**	**2017**	**2018**	**2019**
Tổng diện tích rừng (triệu ha)	13,1	13,2	13,4	13,5	13,9	14,0	13,8	14,1	14,4	14,4	14,5	14,6

(*Nguồn: https://baodantoc.vn*)

Bảng 3

a) Diện tích rừng trung bình của nước ta từ năm 2008 đến năm 2019 là bao nhiêu?

b) Từ năm 2008 đến năm 2019, diện tích rừng của năm có giá trị thấp nhất là bao nhiêu triệu héc-ta? Cao nhất là bao nhiêu triệu héc-ta?

c) So với năm 2008, tỉ lệ tổng diện tích rừng của nước ta năm 2019 tăng lên được bao nhiêu phần trăm? Theo em, tỉ lệ tăng đó là cao hay thấp?

d) Hãy tìm hiểu số liệu về tổng diện tích rừng của tỉnh em đang sống trong một số năm gần đây.

§3 CÁC SỐ ĐẶC TRƯNG ĐO MỨC ĐỘ PHÂN TÁN CHO MẪU SỐ LIỆU KHÔNG GHÉP NHÓM

Kết quả 5 bài kiểm tra môn Toán của hai bạn Dũng và Huy được thống kê trong bảng sau:

Điểm kiểm tra / Học sinh	Bài 1	Bài 2	Bài 3	Bài 4	Bài 5
Dũng	8	6	7	5	9
Huy	6	7	7	8	7

Bảng 4

Kết quả làm bài kiểm tra môn Toán của bạn nào đồng đều hơn?

I. KHOẢNG BIẾN THIÊN. KHOẢNG TỨ PHÂN VỊ

1. Định nghĩa

1 Kết quả của 11 lần đo được thống kê trong mẫu số liệu sau:

2 5 16 8 7 9 10 12 14 11 6 (1)

a) Tìm hiệu giữa số đo lớn nhất và số đo nhỏ nhất.

b) Sắp xếp các số liệu của mẫu (1) theo thứ tự tăng dần. Tìm các giá trị Q_1, Q_2, Q_3 là tứ phân vị của mẫu đó. Sau đó, tìm hiệu $Q_3 - Q_1$.

Nhận xét

- Trong mẫu số liệu (1), hiệu giữa số đo lớn nhất và số đo nhỏ nhất là

$$R = x_{max} - x_{min} = 16 - 2 = 14.$$

Số R gọi là *khoảng biến thiên* của mẫu số liệu (1).

- Sắp xếp các số liệu của mẫu (1) theo thứ tự tăng dần, ta được:

2 5 6 7 8 9 10 11 12 14 16

Vậy $Q_1 = 6$; $Q_2 = 9$; $Q_3 = 12$. Suy ra $\Delta_Q = Q_3 - Q_1 = 12 - 6 = 6$ và gọi là *khoảng tứ phân vị* của mẫu số liệu (1).

- Trong một mẫu số liệu, *khoảng biến thiên* là hiệu số giữa giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của mẫu số liệu đó.

Ta có thể tính khoảng biến thiên R của mẫu số liệu theo công thức sau: $R = x_{max} - x_{min}$, trong đó x_{max} là giá trị lớn nhất, x_{min} là giá trị nhỏ nhất của mẫu số liệu đó.

- Giả sử Q_1, Q_2, Q_3 là tứ phân vị của mẫu số liệu. Ta gọi hiệu $\Delta_Q = Q_3 - Q_1$ là *khoảng tứ phân vị* của mẫu số liệu đó.

Chú ý: Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu còn gọi là khoảng trải giữa (tiếng Anh là InterQuartile Range – IQR) của mẫu số liệu đó.

Ví dụ 1 Mẫu số liệu thống kê chiều cao (đơn vị: mét) của 15 cây bạch đàn là:

6,3 6,6 7,5 8,2 8,3 7,8 7,9 9,0 8,9 7,2 7,5 8,7 7,7 8,8 7,6 (2)

a) Tìm khoảng biến thiên của mẫu số liệu (2).

b) Tìm khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu (2).

Giải

a) Trong mẫu số liệu (2), số lớn nhất là 9,0 và số bé nhất là 6,3. Vậy khoảng biến thiên của mẫu số liệu (2) là:

$$R = x_{\max} - x_{\min} = 9{,}0 - 6{,}3 = 2{,}7 \text{ (m)}.$$

b) Sắp xếp các số liệu của mẫu (2) theo thứ tự tăng dần, ta được:

6,3 6,6 7,2 7,5 7,5 7,6 7,7 7,8 7,9 8,2 8,3 8,7 8,8 8,9 9,0

Do đó $Q_1 = 7{,}5$ (m); $Q_2 = 7{,}8$ (m); $Q_3 = 8{,}7$ (m).

Vậy khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu (2) là: $\Delta_Q = Q_3 - Q_1 = 8{,}7 - 7{,}5 = 1{,}2$ (m).

2. Ý nghĩa

a) Ý nghĩa của khoảng biến thiên: *Khoảng biến thiên của mẫu số liệu phản ánh sự "dao động", "sự dàn trải" của các số liệu trong mẫu đó.* Khoảng biến thiên được sử dụng trong nhiều tình huống thực tiễn, chẳng hạn: tìm ra sự phân tán điểm kiểm tra của một lớp học hay xác định phạm vi giá cả của một dịch vụ ...

Theo cách nhìn như ở trong vật lí, ở đó biên độ dao động phản ánh khoảng cách từ điểm cân bằng đến điểm xa nhất của dao động, nếu coi số trung bình cộng là "điểm cân bằng" của mẫu số liệu thì khoảng biến thiên của mẫu số liệu có thể xem như hai lần biên độ dao động của các số trong mẫu đó quanh điểm cân bằng.

Trong các đại lượng đo mức độ phân tán của mẫu số liệu, khoảng biến thiên là đại lượng dễ hiểu, dễ tính toán và tương đối tốt đối với các mẫu số liệu nhỏ. Tuy nhiên, do khoảng biến thiên chỉ sử dụng hai giá trị $x_{\max}$ và $x_{\min}$ của mẫu số liệu nên đại lượng đó chưa diễn giải đầy đủ sự phân tán của các số liệu trong mẫu. Ngoài ra, giá trị của khoảng biến thiên sẽ bị ảnh hưởng bởi các giá trị bất thường của mẫu số liệu đó. Trong những trường hợp như vậy, khoảng biến thiên của mẫu số liệu không phản ánh chính xác độ dàn trải của mẫu số liệu.

b) Ý nghĩa của khoảng tứ phân vị: *Khoảng tứ phân vị là một đại lượng cho biết mức độ phân tán của 50% số liệu chính giữa của mẫu số liệu đã sắp xếp và có thể giúp xác định các giá trị bất thường của mẫu số liệu đó.* Khoảng tứ phân vị thường được sử dụng thay cho khoảng biến thiên vì nó loại trừ hầu hết giá trị bất thường của mẫu số liệu.

II. PHƯƠNG SAI

1. Định nghĩa

2 Số liệu thống kê kết quả 5 bài kiểm tra môn Toán của bạn Dũng là: 8 6 7 5 9 (3) (xem *Bảng 4*).

Số trung bình cộng của mẫu số liệu (3) là:

$$\overline{x} = \frac{8+6+7+5+9}{5} = 7.$$

> Mỗi hiệu giữa số liệu và số trung bình cộng gọi là *độ lệch* của số liệu đó đối với số trung bình cộng.

a) Tính các độ lệch sau: (8 – 7); (6 – 7); (7 – 7); (5 – 7); (9 – 7).

b) Tính bình phương các độ lệch và tính trung bình cộng của chúng.

Trung bình cộng của bình phương các độ lệch là:

$$s^2 = \frac{(8-7)^2 + (6-7)^2 + (7-7)^2 + (5-7)^2 + (9-7)^2}{5} = 2.$$

Số s^2 được gọi là *phương sai* của mẫu số liệu (3).

Một cách tổng quát, ta có định nghĩa sau:

Cho mẫu số liệu thống kê có n giá trị $x_1, x_2, \ldots, x_n$ và số trung bình cộng là $\overline{x}$.

Ta gọi số $s^2 = \dfrac{(x_1-\overline{x})^2 + (x_2-\overline{x})^2 + \ldots + (x_n-\overline{x})^2}{n}$ là *phương sai* của mẫu số liệu trên.

Nhận xét

• Khi có các số liệu bằng nhau, ta có thể tính phương sai theo công thức sau:

+ Phương sai của mẫu số liệu thống kê trong bảng phân bố tần số là:

$$s^2 = \frac{n_1(x_1-\overline{x})^2 + n_2(x_2-\overline{x})^2 + \ldots + n_k(x_k-\overline{x})^2}{n},$$

trong đó $n = n_1 + n_2 + \ldots + n_k$; $\overline{x}$ là số trung bình cộng của các số liệu đã cho.

Giá trị	x_1	x_2	...	x_k
Tần số	n_1	n_2	...	n_k

+ Phương sai của mẫu số liệu thống kê trong bảng phân bố tần số tương đối là:

$$s^2 = f_1(x_1-\overline{x})^2 + f_2(x_2-\overline{x})^2 + \ldots + f_k(x_k-\overline{x})^2,$$

trong đó $\overline{x}$ là số trung bình cộng của các số liệu đã cho.

Giá trị	x_1	x_2	...	x_k
Tần số tương đối	f_1	f_2	...	f_k

• Trong thực tế, người ta còn dùng công thức sau để tính phương sai của một mẫu số liệu:

$\hat{s}^2 = \dfrac{(x_1 - \overline{x})^2 + (x_2 - \overline{x})^2 + ... + (x_n - \overline{x})^2}{n-1}$, trong đó: x_i là giá trị của quan sát thứ i; $\overline{x}$ là giá trị trung bình và n là số quan sát trong mẫu số liệu đó.

Ví dụ 2 Mẫu số liệu thống kê kết quả 5 bài kiểm tra môn Toán của bạn Dũng, bạn Huy lần lượt là:

8 6 7 5 9 (3)

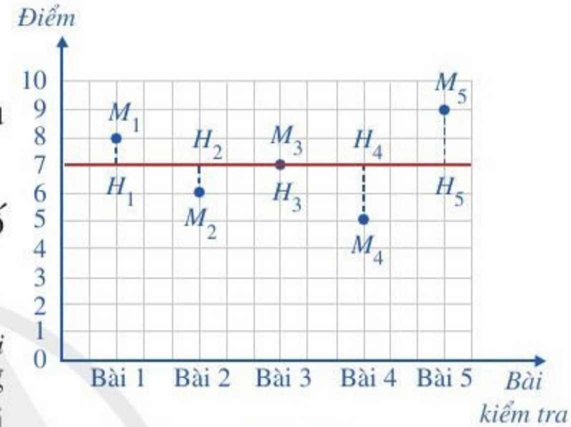
6 7 7 8 7 (4) (xem *Bảng 4*).

Số trung bình cộng của mẫu số liệu (3) và (4) đều là: $\overline{x} = 7$.

a) Tính phương sai s_D^2, s_H^2 lần lượt của hai mẫu số liệu (3) và (4).

b) Xét mẫu số liệu (3), ta gọi độ dài đoạn thẳng M_iH_i là độ lệch của số liệu thống kê x_i đối với số trung bình cộng $\overline{x} = 7$ (*Hình 2*). So sánh phương sai s_D^2 của mẫu số liệu (3) và giá trị của biểu thức

$$\frac{M_1H_1^2 + M_2H_2^2 + M_3H_3^2 + M_4H_4^2 + M_5H_5^2}{5}.$$



Hình 2

c) So sánh s_D^2 và s_H^2. Từ đó cho biết bạn nào có kết quả kiểm tra môn Toán đồng đều hơn.

Giải

a) Ta có: $s_D^2 = \dfrac{(8-7)^2 + (6-7)^2 + (7-7)^2 + (5-7)^2 + (9-7)^2}{5} = 2;$

$$s_H^2 = \frac{(6-7)^2 + (7-7)^2 + (7-7)^2 + (8-7)^2 + (7-7)^2}{5} = \frac{2}{5} = 0,4.$$

b) Với mẫu số liệu (3), ta có:

$M_1H_1 = |8-7|$, $M_2H_2 = |6-7|$, $M_3H_3 = |7-7|$, $M_4H_4 = |5-7|$, $M_5H_5 = |9-7|$.

Vì thế

$$s_D^2 = \frac{M_1H_1^2 + M_2H_2^2 + M_3H_3^2 + M_4H_4^2 + M_5H_5^2}{5}.$$

Như vậy, phương sai s_D^2 đánh giá mức độ phân tán kết quả 5 bài kiểm tra môn Toán của bạn Dũng (so với số trung bình cộng $\overline{x} = 7$).

c) Do $s_H^2 = 0,4 < s_D^2 = 2$ nên bạn Huy có kết quả kiểm tra môn Toán đồng đều hơn bạn Dũng.

1 Mẫu số liệu về thời gian (đơn vị: giây) chạy cự li 500 m của 5 người là:

55,2 58,8 62,4 54 59,4 (5)

Mẫu số liệu về thời gian (đơn vị: giây) chạy cự li 1500 m của 5 người đó là:

271,2 261 276 282 270 (6)

Tính phương sai của mẫu (5) và mẫu (6). Từ đó cho biết cự li chạy nào có kết quả đồng đều hơn.

2. Ý nghĩa

Phương sai là số đặc trưng đo mức độ phân tán của mẫu số liệu. Mẫu số liệu nào có phương sai nhỏ hơn thì mức độ phân tán (so với số trung bình cộng) của các số liệu trong mẫu đó sẽ thấp hơn.

III. ĐỘ LỆCH CHUẨN

1. Định nghĩa

3 Trong *Ví dụ 2*, phương sai của mẫu số liệu (4) là $s_H^2 = 0,4$. Tính $s_H = \sqrt{s_H^2}$.

Căn bậc hai của phương sai gọi là *độ lệch chuẩn* của mẫu số liệu thống kê.

Nhận xét: Vì đơn vị đo của phương sai là bình phương đơn vị đo của số liệu thống kê, trong khi độ lệch chuẩn lại có cùng đơn vị đo với số liệu thống kê, nên khi cần chú ý đến đơn vị đo thì ta sử dụng độ lệch chuẩn.

Ví dụ 3 *Bảng 5* thống kê nhiệt độ (đơn vị: ^{o}C) ở Thành phố Hồ Chí Minh ngày 03/6/2021 sau một số lần đo.

Giờ đo	1 h	4 h	7 h	10 h	13 h	16 h	19 h	22 h
Nhiệt độ (^{o}C)	27	26	28	32	34	35	30	28

Bảng 5

a) Viết mẫu số liệu thống kê nhiệt độ từ *Bảng 5*.

b) Tính số trung bình cộng, phương sai và độ lệch chuẩn của mẫu số liệu đó.

Giải

a) Mẫu số liệu thống kê nhiệt độ nhận được từ *Bảng 5* là: 27 26 28 32 34 35 30 28

b) Nhiệt độ trung bình là:

$$\overline{x} = \frac{27 + 26 + 28 + 32 + 34 + 35 + 30 + 28}{8} = 30\ (^{o}\text{C}).$$

Phương sai của mẫu số liệu đó là:

$$s^2 = \frac{(x_1 - \overline{x})^2 + (x_2 - \overline{x})^2 + (x_3 - \overline{x})^2 + (x_4 - \overline{x})^2 + (x_5 - \overline{x})^2 + (x_6 - \overline{x})^2 + (x_7 - \overline{x})^2 + (x_8 - \overline{x})^2}{8}$$

$$= \frac{(-3)^2 + (-4)^2 + (-2)^2 + 2^2 + 4^2 + 5^2 + 0^2 + (-2)^2}{8} = \frac{78}{8} = 9,75.$$

Độ lệch chuẩn của mẫu số liệu đó là: $s = \sqrt{9,75} \approx 3,12\ (^{o}\text{C})$.

2 Mẫu số liệu về số lượng áo bán ra lần lượt từ tháng 1 đến tháng 12 của một doanh nghiệp là:

430 560 450 550 760 430

525 410 635 450 800 900

Tính độ lệch chuẩn của mẫu số liệu đó.

2. Ý nghĩa

Cũng như phương sai, khi hai mẫu số liệu thống kê có cùng đơn vị đo và có số trung bình cộng bằng nhau (hoặc xấp xỉ nhau), mẫu số liệu nào có độ lệch chuẩn nhỏ hơn thì mức độ phân tán (so với số trung bình cộng) của các số liệu trong mẫu đó sẽ thấp hơn. Độ lệch chuẩn là số đặc trưng đo mức độ phân tán của mẫu số liệu thống kê có cùng đơn vị đo.

IV. TÍNH HỢP LÍ CỦA SỐ LIỆU THỐNG KÊ

Ta có thể sử dụng các số đặc trưng đo mức độ phân tán cho mẫu số liệu không ghép nhóm để chỉ ra được những số liệu bất thường của mẫu số liệu đó. Ta thường sử dụng khoảng tứ phân vị để xác định số liệu bất thường của mẫu số liệu. Cụ thể như sau:

Giả sử Q_1, Q_2, Q_3 là tứ phân vị của mẫu số liệu và hiệu $\Delta_Q = Q_3 - Q_1$ là khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu đó. Một giá trị trong mẫu số liệu được coi là một giá trị bất thường nếu nó nhỏ hơn $Q_1 - \frac{3}{2}\Delta_Q$ hoặc lớn hơn $Q_3 + \frac{3}{2}\Delta_Q$. Như vậy, khoảng tứ phân vị cho ta cách nhận ra giá trị bất thường của mẫu số liệu.

Ví dụ 4 Nêu các giá trị bất thường của mẫu số liệu thống kê sau:

5 6 19 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30 31 32 33 34 48 49 (7)

Giải

Mẫu số liệu (7) có tứ phân vị là $Q_1 = 22$; $Q_2 = 27$; $Q_3 = 32$. Suy ra

$$\Delta_Q = Q_3 - Q_1 = 32 - 22 = 10.$$

Các giá trị 5, 6 (nhỏ hơn $Q_1 - \frac{3}{2}\Delta_Q = 22 - \frac{3}{2}.10 = 7$) và các giá trị 48, 49 (lớn hơn $Q_3 + \frac{3}{2}\Delta_Q = 32 + \frac{3}{2}.10 = 47$) là các giá trị bất thường của mẫu số liệu (7).

Chú ý: Ta cũng có thể xác định số liệu bất thường của mẫu số liệu bằng số trung bình cộng và độ lệch chuẩn. Cụ thể như sau:

Giả sử $\overline{x}$, s lần lượt là số trung bình cộng và độ lệch chuẩn của mẫu số liệu. Một giá trị trong mẫu số liệu cũng được coi là một giá trị bất thường nếu nó nhỏ hơn $\overline{x} - 3s$ hoặc lớn hơn $\overline{x} + 3s$. Như vậy, số trung bình cộng và độ lệch chuẩn cho ta cách nhận ra giá trị bất thường của mẫu số liệu.

BÀI TẬP

1. Trong 5 lần nhảy xa, hai bạn Hùng và Trung có kết quả (đơn vị: mét) lần lượt là

Hùng	2,4	2,6	2,4	2,5	2,6
Trung	2,4	2,5	2,5	2,5	2,6

a) Kết quả trung bình của hai bạn có bằng nhau hay không?

b) Tính phương sai của mẫu số liệu thống kê kết quả 5 lần nhảy xa của mỗi bạn. Từ đó cho biết bạn nào có kết quả nhảy xa ổn định hơn.

2. Biểu đồ đoạn thẳng ở *Hình 3* biểu diễn tốc độ tăng trưởng GDP của Việt Nam giai đoạn 2012 – 2019.

a) Viết mẫu số liệu thống kê tốc độ tăng trưởng GDP nhận được từ biểu đồ ở *Hình 3*.

b) Tìm khoảng biến thiên của mẫu số liệu đó.

c) Tìm khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu đó.

d) Tính phương sai và độ lệch chuẩn của mẫu số liệu đó.

(Nguồn https://gso.gov.vn)

Hình 3

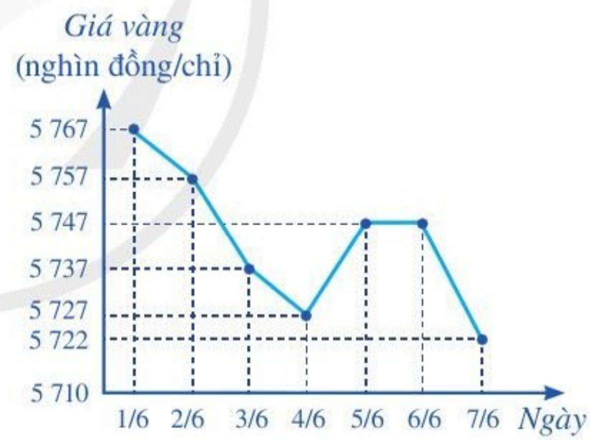
3. Biểu đồ đoạn thẳng ở *Hình 4* biểu diễn giá vàng bán ra trong bảy ngày đầu tiên của tháng 6 năm 2021.

a) Viết mẫu số liệu thống kê giá vàng bán ra nhận được từ biểu đồ ở *Hình 4*.

b) Tìm khoảng biến thiên của mẫu số liệu đó.

c) Tìm khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu đó.

d) Tính phương sai và độ lệch chuẩn của mẫu số liệu đó.



(Nguồn: https://bieudogiavang.vn)

Hình 4

4. Để biết cây đậu phát triển như thế nào sau khi gieo hạt, bạn Châu gieo 5 hạt đậu vào 5 chậu riêng biệt và cung cấp cho chúng lượng nước, ánh sáng như nhau. Sau hai tuần, 5 hạt đậu đã nảy mầm và phát triển thành 5 cây con. Bạn Châu đo chiều cao từ rễ đến ngọn của mỗi cây (đơn vị: mi-li-mét) và ghi kết quả là mẫu số liệu sau:

112   102   106   94   101

a) Tính phương sai và độ lệch chuẩn của mẫu số liệu trên.

b) Theo em, các cây có phát triển đồng đều hay không?

§4 XÁC SUẤT CỦA BIẾN CỐ TRONG MỘT SỐ TRÒ CHƠI ĐƠN GIẢN

Quan sát đồng xu ở *Hình 5* ta quy ước: mặt xuất hiện số 5 000 là mặt sấp hay mặt S; mặt xuất hiện Quốc huy Việt Nam là mặt ngửa hay mặt N. Tung một đồng xu cân đối và đồng chất hai lần liên tiếp. Xét biến cố "Có ít nhất một lần xuất hiện mặt ngửa".

Hai mặt của đồng xu
Hình 5

Làm thế nào để tính được xác suất của biến cố nói trên?

I. XÁC SUẤT CỦA BIẾN CỐ TRONG TRÒ CHƠI TUNG ĐỒNG XU

Trong trò chơi tung đồng xu, ta quy ước đồng xu là cân đối và đồng chất.

Tung một đồng xu hai lần liên tiếp. Thực hiện các hoạt động sau:

1 Viết tập hợp Ω các kết quả có thể xảy ra đối với mặt xuất hiện của đồng xu sau hai lần tung.

Nhận xét

• Tập hợp Ω các kết quả có thể xảy ra đối với mặt xuất hiện của đồng xu sau hai lần tung là $\Omega = \{SS; SN; NS; NN\}$, trong đó, chẳng hạn SN là kết quả "Lần thứ nhất đồng xu xuất hiện mặt sấp, lần thứ hai đồng xu xuất hiện mặt ngửa".

• Tập hợp Ω gọi là *không gian mẫu* trong trò chơi tung một đồng xu hai lần liên tiếp.

2 Xét sự kiện "Kết quả của hai lần tung đồng xu là giống nhau". Sự kiện đã nêu bao gồm những kết quả nào trong tập hợp Ω? Viết tập hợp A các kết quả đó.

Nhận xét

• Tập hợp A các kết quả có thể xảy ra đối với sự kiện trên là: $A = \{SS; NN\}$. Ta thấy $A \subset \Omega$. Tập hợp A còn gọi là *biến cố ngẫu nhiên* (hay gọi tắt là *biến cố*) trong trò chơi nói trên. Khi đó, sự kiện đã nêu chỉ ra tính chất đặc trưng cho các phần tử của tập hợp A.

• Mỗi phần tử của tập hợp A được gọi là một *kết quả thuận lợi* cho biến cố A: "Kết quả của hai lần tung đồng xu là giống nhau".

Sở dĩ ta gọi những phần tử đó là kết quả thuận lợi cho biến cố trên vì chúng đáp ứng được mong muốn thể hiện trong biến cố, đó là mặt xuất hiện ở cả hai lần tung đồng xu là giống nhau.

3 Viết tỉ số giữa số phần tử của tập hợp A và số phần tử của tập hợp Ω.

Nhận xét: Tỉ số giữa số phần tử của tập hợp A và số phần tử của tập hợp Ω là $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$.

Tỉ số này được gọi là *xác suất* của biến cố A: "Kết quả của hai lần tung đồng xu là giống nhau" trong trò chơi nói trên.

Trong trò chơi tung một đồng xu hai lần liên tiếp, đối với mỗi biến cố A, ta có định nghĩa cổ điển của xác suất như sau:

Xác suất của biến cố A, kí hiệu $P(A)$, là tỉ số giữa số các kết quả thuận lợi cho biến cố A và số phần tử của không gian mẫu Ω:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)},$$

ở đó $n(A)$, $n(\Omega)$ lần lượt là số phần tử của hai tập hợp A và Ω.

Ví dụ 1 Tung một đồng xu hai lần liên tiếp.

a) Viết tập hợp Ω là không gian mẫu trong trò chơi trên.

b) Xét biến cố B: "Có ít nhất một lần xuất hiện mặt ngửa". Tính xác suất của biến cố B.

Giải

a) Không gian mẫu trong trò chơi trên là tập hợp $\Omega = \{SS; SN; NS; NN\}$.

b) Có ba kết quả thuận lợi cho biến cố B là: SN, NS, NN, tức là $B = \{SN; NS; NN\}$.

Vì thế, xác suất của biến cố B là $\frac{n(B)}{n(\Omega)} = \frac{3}{4}$.

1 Tung một đồng xu hai lần liên tiếp. Xét biến cố "Có ít nhất một lần xuất hiện mặt sấp". Tính xác suất của biến cố nói trên.

II. XÁC SUẤT CỦA BIẾN CỐ TRONG TRÒ CHƠI GIEO XÚC XẮC

Trong trò chơi gieo xúc xắc, ta quy ước xúc xắc là cân đối và đồng chất.

Gieo một xúc xắc hai lần liên tiếp. Thực hiện các hoạt động sau:

4 Viết tập hợp Ω các kết quả có thể xảy ra đối với mặt xuất hiện của xúc xắc sau hai lần gieo.

Nhận xét: Khi gieo một xúc xắc hai lần liên tiếp, có 36 kết quả có thể xảy ra đối với mặt xuất hiện của xúc xắc sau hai lần gieo, đó là:

(1 ; 1)	(1 ; 2)	(1 ; 3)	(1 ; 4)	(1 ; 5)	(1 ; 6)
(2 ; 1)	(2 ; 2)	(2 ; 3)	(2 ; 4)	(2 ; 5)	(2 ; 6)
(3 ; 1)	(3 ; 2)	(3 ; 3)	(3 ; 4)	(3 ; 5)	(3 ; 6)
(4 ; 1)	(4 ; 2)	(4 ; 3)	(4 ; 4)	(4 ; 5)	(4 ; 6)
(5 ; 1)	(5 ; 2)	(5 ; 3)	(5 ; 4)	(5 ; 5)	(5 ; 6)
(6 ; 1)	(6 ; 2)	(6 ; 3)	(6 ; 4)	(6 ; 5)	(6 ; 6)

• Tập hợp Ω các kết quả có thể xảy ra đối với mặt xuất hiện của xúc xắc sau hai lần gieo là $\Omega = \{(i\ ;\ j) \mid i, j = 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, trong đó $(i\ ;\ j)$ là kết quả "Lần thứ nhất xuất hiện mặt i chấm, lần thứ hai xuất hiện mặt j chấm".

• Tập hợp Ω gọi là *không gian mẫu* trong trò chơi gieo một xúc xắc hai lần liên tiếp.

5 Xét sự kiện "Tổng số chấm trong hai lần gieo xúc xắc bằng 8". Sự kiện đã nêu bao gồm những kết quả nào trong tập hợp Ω? Viết tập hợp C các kết quả đó.

Nhận xét

• Tập hợp C các kết quả có thể xảy ra đối với sự kiện trên là:

$$C = \{(2\ ;\ 6); (3\ ;\ 5); (4\ ;\ 4); (5\ ;\ 3); (6\ ;\ 2)\}.$$

Ta thấy $C \subset \Omega$. Tập hợp C cũng gọi là *biến cố ngẫu nhiên* (hay gọi tắt là *biến cố*) trong trò chơi nói trên. Khi đó, sự kiện đã nêu chỉ ra tính chất đặc trưng cho các phần tử của tập hợp C.

• Mỗi phần tử của tập hợp C được gọi là một *kết quả thuận lợi* cho biến cố C: "Tổng số chấm trong hai lần gieo xúc xắc bằng 8".

6 Viết tỉ số giữa số phần tử của tập hợp C và số phần tử của tập hợp Ω.

Nhận xét: Tỉ số giữa số phần tử của tập hợp C và số phần tử của tập hợp Ω là $\frac{5}{36}$. Tỉ số này được gọi là *xác suất* của biến cố C: "Tổng số chấm trong hai lần gieo xúc xắc bằng 8" trong trò chơi nói trên.

Trong trò chơi gieo một xúc xắc hai lần liên tiếp, đối với mỗi biến cố C, ta có định nghĩa cổ điển của xác suất như sau:

> Xác suất của biến cố C, kí hiệu $\mathrm{P}(C)$, là tỉ số giữa số các kết quả thuận lợi cho biến cố C và số phần tử của không gian mẫu Ω:
> $$\mathrm{P}(C) = \frac{n(C)}{n(\Omega)},$$
> ở đó $n(C)$, $n(\Omega)$ lần lượt là số phần tử của hai tập hợp C và Ω.

Ví dụ 2 Gieo một xúc xắc hai lần liên tiếp.

a) Viết tập hợp Ω là không gian mẫu trong trò chơi trên.

b) Xét biến cố D: "Số chấm trong hai lần gieo đều là số lẻ". Tính xác suất của biến cố D.

Giải

a) Không gian mẫu trong trò chơi trên là tập hợp

$$\Omega = \{(i\ ;\ j) \mid i, j = 1, 2, 3, 4, 5, 6\},$$

trong đó $(i\ ;\ j)$ là kết quả "Lần đầu xuất hiện mặt i chấm, lần sau xuất hiện mặt j chấm". Tập hợp Ω có 36 phần tử.

b) Có 9 kết quả thuận lợi cho biến cố D là: $(1\ ;\ 1)$; $(1\ ;\ 3)$; $(1\ ;\ 5)$; $(3\ ;\ 1)$; $(3\ ;\ 3)$; $(3\ ;\ 5)$; $(5\ ;\ 1)$; $(5\ ;\ 3)$; $(5\ ;\ 5)$, tức là $D = \{(1\ ;\ 1); (1\ ;\ 3); (1\ ;\ 5); (3\ ;\ 1); (3\ ;\ 3); (3\ ;\ 5); (5\ ;\ 1); (5\ ;\ 3); (5\ ;\ 5)\}$. Tập hợp D có 9 phần tử.

Vậy xác suất của biến cố nói trên là: $\dfrac{n(D)}{n(\Omega)} = \dfrac{9}{36} = \dfrac{1}{4}$.

2 Gieo một xúc xắc hai lần liên tiếp. Xét biến cố "Số chấm trong hai lần gieo đều là số nguyên tố". Tính xác suất của biến cố đó.

BÀI TẬP

1. Tung một đồng xu hai lần liên tiếp. Tính xác suất của biến cố "Kết quả của hai lần tung là khác nhau".

2. Tung một đồng xu ba lần liên tiếp.

a) Viết tập hợp Ω là không gian mẫu trong trò chơi trên.

b) Xác định mỗi biến cố:

A: "Lần đầu xuất hiện mặt ngửa";

B: "Mặt ngửa xảy ra đúng một lần".

3. Gieo một xúc xắc hai lần liên tiếp.

a) Tìm số phần tử của tập hợp Ω là không gian mẫu trong trò chơi trên.

b) Phát biểu mỗi biến cố sau dưới dạng mệnh đề nêu sự kiện:

$A = \{(6\ ;\ 1); (6\ ;\ 2); (6\ ;\ 3); (6\ ;\ 4); (6\ ;\ 5); (6\ ;\ 6)\}$;

$B = \{(1\ ;\ 6); (2\ ;\ 5); (3\ ;\ 4); (4\ ;\ 3); (5\ ;\ 2); (6\ ;\ 1)\}$;

$C = \{(1\ ;\ 1); (2\ ;\ 2); (3\ ;\ 3); (4\ ;\ 4); (5\ ;\ 5); (6\ ;\ 6)\}$.

4. Gieo một xúc xắc hai lần liên tiếp. Tính xác suất của mỗi biến cố sau:

a) "Tổng số chấm xuất hiện trong hai lần gieo không bé hơn 10";

b) "Mặt 6 chấm xuất hiện ít nhất một lần".

§5 XÁC SUẤT CỦA BIẾN CỐ

Gieo một xúc xắc hai lần liên tiếp. Xét biến cố "Có ít nhất một lần xuất hiện mặt 6 chấm".

Làm thế nào để tính được xác suất của biến cố nói trên?

Sáu mặt của xúc xắc

I. MỘT SỐ KHÁI NIỆM VỀ XÁC SUẤT

1. Phép thử ngẫu nhiên và không gian mẫu

1 Đọc kĩ những nội dung sau:

• Một trong những khái niệm cơ bản của lí thuyết xác suất là *phép thử*. Chẳng hạn, tung đồng xu hay gieo xúc xắc, ... là những ví dụ về phép thử.

• Trong toán học phổ thông, ta chỉ xét những phép thử có thể xác định được tập hợp tất cả các kết quả có thể xảy ra của phép thử đó và tập hợp này là tập hữu hạn. Chẳng hạn, khi tung một đồng xu, ta biết được mặt xuất hiện của đồng xu là sấp hoặc ngửa.

> Có những phép thử mà ta không thể đoán trước được kết quả của nó, mặc dù đã biết tập hợp tất cả các kết quả có thể có của phép thử đó. Những phép thử như thế gọi là *phép thử ngẫu nhiên* (gọi tắt là phép thử).

2 Xét phép thử "Gieo một xúc xắc một lần", kết quả có thể xảy ra của phép thử là số chấm trên mặt xuất hiện của xúc xắc. Viết tập hợp Ω các kết quả có thể xảy ra của phép thử trên.

Nhận xét

• Tập hợp Ω các kết quả có thể xảy ra của phép thử trên là $\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$.

• Tập hợp Ω gọi là *không gian mẫu* của phép thử.

Một cách tổng quát, ta có định nghĩa sau:

> Tập hợp Ω các kết quả có thể xảy ra của một phép thử gọi là *không gian mẫu* của phép thử đó.

Ví dụ 1 Một hộp có 3 chiếc thẻ cùng loại, mỗi thẻ được ghi một trong các số 1, 2, 3; hai thẻ khác nhau thì ghi hai số khác nhau. Rút ngẫu nhiên một chiếc thẻ từ trong hộp, ghi lại số của thẻ được rút ra và bỏ lại thẻ đó vào hộp. Xét phép thử "Rút ngẫu nhiên liên tiếp hai chiếc thẻ trong hộp". Hãy cho biết không gian mẫu của phép thử đó.

Giải

Không gian mẫu của phép thử trên là tập hợp $\Omega = \{(1 ; 1); (1 ; 2); (1 ; 3); (2 ; 1); (2 ; 2); (2 ; 3); (3 ; 1); (3 ; 2); (3 ; 3)\}$, ở đó, chẳng hạn $(1 ; 2)$ là kết quả "Lần thứ nhất rút ra thẻ ghi số 1, lần thứ hai rút ra thẻ ghi số 2".

Ví dụ 2 Một hộp có 1 quả bóng xanh, 1 quả bóng đỏ, 1 quả bóng vàng; các quả bóng có kích thước và khối lượng giống nhau. Lấy ngẫu nhiên một quả bóng từ trong hộp, ghi lại màu của quả bóng được lấy ra và bỏ lại quả bóng đó vào hộp. Xét phép thử "Lấy ngẫu nhiên liên tiếp hai quả bóng trong hộp". Hãy cho biết không gian mẫu của phép thử đó.

Giải

Không gian mẫu của phép thử trên là tập hợp $\Omega = \{$XX; XĐ; XV; ĐĐ; ĐV; ĐX; VV; VX; VĐ$\}$, ở đó, chẳng hạn XĐ là kết quả "Lần thứ nhất lấy ra quả bóng xanh, lần thứ hai lấy ra quả bóng đỏ".

2. Biến cố

a) Định nghĩa

3 Xét phép thử *T*: "Tung một đồng xu hai lần liên tiếp".

Không gian mẫu của phép thử trên là tập hợp $\Omega = \{$SS; SN; NS; NN$\}$.

a) Sự kiện "Kết quả của hai lần tung là giống nhau" tương ứng với tập con *A* nào của tập hợp Ω?

b) Phát biểu tập con $B = \{$SN; NS$\}$ của không gian mẫu Ω dưới dạng mệnh đề nêu sự kiện.

Nhận xét

• Mỗi sự kiện liên quan đến phép thử *T* tương ứng với một (và chỉ một) tập con *A* của không gian mẫu Ω.

• Ngược lại, mỗi tập con *A* của không gian mẫu Ω có thể phát biểu dưới dạng mệnh đề nêu sự kiện liên quan đến phép thử *T*.

Một cách tổng quát, ta có định nghĩa sau:

Biến cố ngẫu nhiên (gọi tắt là *biến cố*) là một tập con của không gian mẫu.

Chú ý: Vì sự kiện chỉ ra tính chất đặc trưng cho các phần tử của một biến cố nên ta cũng gọi sự kiện là biến cố. Chẳng hạn: Sự kiện "Kết quả của hai lần tung là giống nhau" trong phép thử "Tung một đồng xu hai lần liên tiếp" là một biến cố.

Ví dụ 3 Xét phép thử "Gieo một xúc xắc hai lần liên tiếp".

a) Sự kiện "Tổng số chấm trong hai lần gieo chia hết cho 5" tương ứng với biến cố nào của phép thử trên?

b) Phát biểu biến cố

$D = \{(1 ; 5); (5 ; 1); (2 ; 4); (4 ; 2); (3 ; 3); (6 ; 6)\}$

của không gian mẫu (của phép thử trên) dưới dạng mệnh đề nêu sự kiện.

Giải

a) Sự kiện "Tổng số chấm trong hai lần gieo chia hết cho 5" tương ứng với biến cố:

$C = \{(1 ; 4); (4 ; 1); (2 ; 3); (3 ; 2); (4 ; 6); (6 ; 4); (5 ; 5)\}$

của phép thử trên.

b) Tập con D bao gồm tất cả các phần tử của không gian mẫu có tính chất đặc trưng là tổng hai số trong mỗi cặp chia hết cho 6. Vậy biến cố D có thể phát biểu dưới dạng mệnh đề nêu sự kiện "Tổng số chấm trong hai lần gieo chia hết cho 6".

1 Xét phép thử "Gieo một xúc xắc hai lần liên tiếp".

a) Sự kiện "Số chấm trong lần gieo thứ hai là 6" tương ứng với biến cố nào của phép thử trên?

b) Phát biểu biến cố $E = \{(5 ; 6); (6 ; 5); (6 ; 6)\}$ của không gian mẫu (trong phép thử trên) dưới dạng mệnh đề nêu sự kiện.

b) Biến cố không. Biến cố chắc chắn

Xét phép thử T với không gian mẫu Ω. Mỗi biến cố là một tập con của tập hợp Ω. Vì thế, tập rỗng $\varnothing$ cũng là một biến cố, gọi là *biến cố không thể* (gọi tắt là *biến cố không*). Còn tập hợp Ω gọi là *biến cố chắc chắn*.

Chẳng hạn, khi gieo một xúc xắc, biến cố "Mặt xuất hiện có 7 chấm" là biến cố không, còn biến cố "Mặt xuất hiện có số chấm không vượt quá 6" là biến cố chắc chắn.

c) Biến cố đối

Xét phép thử T với không gian mẫu là Ω. Giả sử A là một biến cố. Như vậy, A là tập con của tập hợp Ω. Ta xét tập con $\Omega \setminus A$ là phần bù của A trong Ω.

Tập con $\Omega \setminus A$ xác định một biến cố, gọi là *biến cố đối* của biến cố A, kí hiệu là $\overline{A}$.

Chẳng hạn, khi gieo ngẫu nhiên một xúc xắc một lần, biến cố "Mặt xuất hiện của xúc xắc có số chấm là số lẻ" là biến cố đối của biến cố "Mặt xuất hiện của xúc xắc có số chấm là số chẵn".

Chú ý: Nếu biến cố A được mô tả dưới dạng mệnh đề toán học Q thì biến cố đối $\overline{A}$ được mô tả bằng mệnh đề phủ định của mệnh đề Q (tức là mệnh đề $\overline{Q}$).

3. Xác suất của biến cố

4 Xét phép thử "Tung một đồng xu hai lần liên tiếp".

Không gian mẫu của phép thử trên là tập hợp $\Omega = \{SS; SN; NS; NN\}$.

Tính xác suất của biến cố $A = \{SS; NN\}$.

Một cách tổng quát, ta có định nghĩa sau:

Xét phép thử chỉ có một số hữu hạn kết quả có thể xảy ra và khả năng xảy ra của từng kết quả là giống nhau. Gọi Ω là không gian mẫu của phép thử đó. Khi đó, với mỗi biến cố A, ta có định nghĩa cổ điển của xác suất như sau:

> Xác suất của biến cố A, kí hiệu là $\mathrm{P}(A)$, bằng tỉ số $\dfrac{n(A)}{n(\Omega)}$, ở đó $n(A)$, $n(\Omega)$ lần lượt là số phần tử của hai tập hợp A và Ω. Như vậy: $\mathrm{P}(A)= \dfrac{n(A)}{n(\Omega)}$.

Ví dụ 4 Một hộp có 5 chiếc thẻ cùng loại, mỗi thẻ được ghi một trong các số 1, 2, 3, 4, 5; hai thẻ khác nhau thì ghi hai số khác nhau. Rút ngẫu nhiên đồng thời 2 chiếc thẻ từ trong hộp.

a) Gọi Ω là không gian mẫu trong trò chơi trên. Tính số phần tử của tập hợp Ω.

b) Tính xác suất của biến cố E: "Tổng các số trên hai thẻ là số lẻ".

Giải

a) Mỗi phần tử của không gian mẫu Ω là một tổ hợp chập 2 của 5 phần tử trong tập hợp $\{1; 2; 3; 4; 5\}$. Vì thế

$$n(\Omega) = \mathrm{C}_5^2 = \frac{5!}{2!\,.\,3!} = \frac{5\,.\,4}{2} = 10.$$

b) Biến cố E gồm các cách chọn ra hai chiếc thẻ ghi số là: 1 và 2; 1 và 4; 2 và 3; 2 và 5; 3 và 4; 4 và 5. Vì thế $n(E) = 6$. Vậy xác suất của biến cố E là:

$$\mathrm{P}(E) = \frac{n(E)}{n(\Omega)} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}.$$

Ví dụ 5 Từ một hộp chứa 5 quả cầu trắng và 5 quả cầu đỏ; các quả cầu có kích thước và khối lượng giống nhau. Lấy ngẫu nhiên đồng thời hai quả cầu. Tính xác suất lấy được hai quả cầu khác màu.

Giải

Mỗi lần lấy ra đồng thời hai quả cầu cho ta một tổ hợp chập 2 của 10 phần tử. Do đó, không gian mẫu Ω gồm các tổ hợp chập 2 của 10 phần tử và

$$n(\Omega) = C_{10}^{2} = \frac{10!}{2!\,.\,8!} = \frac{10\,.\,9}{2} = 45.$$

Xét biến cố G: "Hai quả cầu lấy ra khác màu".

Khi hai quả cầu lấy ra khác màu thì một quả cầu lấy ra có màu trắng, quả cầu còn lại có màu đỏ. Có 5 cách lấy ra một quả cầu màu trắng và cũng có 5 cách lấy ra một quả cầu màu đỏ. Theo quy tắc nhân, ta có $n(G) = 5\,.\,5 = 25$.

Vậy xác suất của biến cố G là:

$$P(G) = \frac{n(G)}{n(\Omega)} = \frac{25}{45} = \frac{5}{9}.$$

2 Có 5 bông hoa màu trắng, 5 bông hoa màu vàng và 6 bông hoa màu đỏ. Người ta chọn ra 4 bông hoa từ các bông hoa trên.

Tính xác suất của biến cố "Bốn bông hoa chọn ra có cả ba màu".

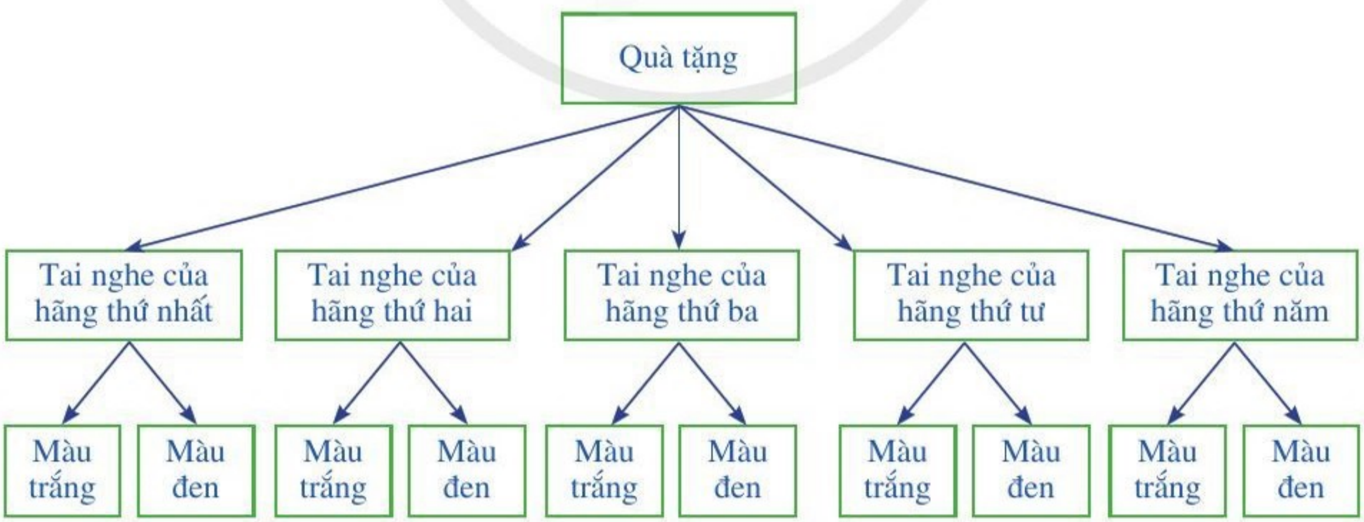
Ví dụ 6 Nhân dịp khai trương một cửa hàng kinh doanh đồ điện tử, khách hàng đầu tiên sau khi mua hàng sẽ được nhận một phiếu tặng quà. Món quà là một chiếc tai nghe của một trong năm hãng và tai nghe mỗi hãng có đủ hai màu trắng hoặc đen.

a) Vẽ sơ đồ hình cây biểu thị các khả năng của một món quà mà khách hàng đầu tiên có thể nhận được từ phiếu tặng quà.

b) Tính xác suất của biến cố H: "Khách hàng đầu tiên nhận được chiếc tai nghe màu trắng từ phiếu tặng quà".

Giải

a) Sơ đồ hình cây biểu thị các khả năng của một món quà mà khách hàng đầu tiên có thể nhận được từ phiếu tặng quà:



b) Ta thấy không gian mẫu Ω là các loại tai nghe đếm theo hãng và theo màu của tai nghe. Dựa vào sơ đồ hình cây ở trên, ta thấy:

- $n(\Omega) = 10$.

• Khách hàng đầu tiên có thể nhận được 1 trong 5 loại tai nghe màu trắng ứng với năm hãng, tức là $n(H) = 5$.

Vậy xác suất để xảy ra biến cố H là $P(H) = \dfrac{n(H)}{n(\Omega)} = \dfrac{5}{10} = \dfrac{1}{2}$.

II. TÍNH CHẤT CỦA XÁC SUẤT

Xét phép thử T với không gian mẫu là Ω. Khi đó, ta có các tính chất sau:

- $P(\varnothing) = 0$; $P(\Omega) = 1$;
- $0 \leq P(A) \leq 1$ với mỗi biến cố A;
- $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$ với mỗi biến cố A.

Chứng minh

• Xác suất của biến cố không là $P(\varnothing) = \dfrac{n(\varnothing)}{n(\Omega)} = \dfrac{0}{n(\Omega)} = 0$;

Xác suất của biến cố chắc chắn là $P(\Omega) = \dfrac{n(\Omega)}{n(\Omega)} = 1$.

• Do $P(A) = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)}$ và $0 \leq n(A) \leq n(\Omega)$ nên $0 \leq P(A) \leq 1$ với mỗi biến cố A.

• Do $n(\Omega \setminus A) = n(\Omega) - n(A)$ nên xác suất của biến cố $\overline{A}$ là:

$$P(\overline{A}) = \frac{n(\Omega \setminus A)}{n(\Omega)} = \frac{n(\Omega) - n(A)}{n(\Omega)} = 1 - \frac{n(A)}{n(\Omega)} = 1 - P(A).$$

Ví dụ 7 Một hộp có 10 quả bóng trắng và 10 quả bóng đỏ; các quả bóng có kích thước và khối lượng giống nhau. Lấy ngẫu nhiên đồng thời 9 quả bóng trong hộp. Tính xác suất để trong 9 quả bóng được lấy ra có ít nhất một quả bóng màu đỏ.

Giải

Mỗi lần lấy ra đồng thời 9 quả bóng cho ta một tổ hợp chập 9 của 20 phần tử. Do đó, không gian mẫu Ω gồm các tổ hợp chập 9 của 20 phần tử và $n(\Omega) = C_{20}^{9}$.

Xét biến cố K: "Trong 9 quả bóng được lấy ra có ít nhất một quả bóng màu đỏ".

Khi đó biến cố đối của biến cố K là biến cố $\overline{K}$: "Trong 9 quả bóng được lấy ra không có quả bóng màu đỏ nào", tức là cả 9 quả bóng được lấy ra có màu trắng.

3 Có 15 bông hoa màu trắng và 15 bông hoa màu vàng. Người ta chọn ra đồng thời 10 bông hoa. Tính xác suất của biến cố "Trong 10 bông hoa được chọn ra có ít nhất một bông màu trắng".

Mỗi lần lấy ra đồng thời 9 quả bóng màu trắng cho ta một tổ hợp chập 9 của 10 phần tử.

Do đó $n(\overline{K}) = C_{10}^{9} = \dfrac{10!}{9!\,.\,1!} = 10$. Suy ra $P(\overline{K}) = \dfrac{n(\overline{K})}{n(\Omega)} = \dfrac{10}{C_{20}^{9}}$. Vậy

$$P(K) = 1 - P(\overline{K}) = 1 - \frac{10}{C_{20}^{9}}.$$

III. NGUYÊN LÍ XÁC SUẤT BÉ

Qua thực nghiệm và quan sát thực tế, người ta thấy rằng các biến cố có xác suất bé sẽ gần như không xảy ra trong phép thử. Chẳng hạn, mỗi chuyến bay đều có một xác suất rất bé bị xảy ra tai nạn. Nhưng trên thực tế, tai nạn của một chuyến bay sẽ không xảy ra. Từ đó, ta thừa nhận nguyên lí sau đây, gọi là nguyên lí xác suất bé: *Nếu một biến cố ngẫu nhiên có xác suất rất bé thì thực tế có thể cho rằng trong một phép thử biến cố đó sẽ không xảy ra.*

Tuy nhiên, một xác suất như thế nào được xem là bé phải tuỳ thuộc vào từng bài toán cụ thể. Ví dụ như xác suất để dù không mở là 0,01 (dùng cho nhảy dù) thì cũng không thể coi là bé và không thể dùng loại dù đó. Nhưng nếu xác suất để tàu về ga chậm là 0,01 thì lại có thể xem là tàu về ga đúng giờ.

BÀI TẬP

1. Một hộp có 5 chiếc thẻ cùng loại, mỗi thẻ được ghi một trong các số 1, 2, 3, 4, 5; hai thẻ khác nhau thì ghi hai số khác nhau. Rút ngẫu nhiên đồng thời 2 chiếc thẻ từ trong hộp.

a) Gọi Ω là không gian mẫu trong trò chơi trên. Tính số phần tử của tập hợp Ω.

b) Tính xác suất của biến cố "Tích các số trên hai thẻ là số lẻ".

2. Một hộp có 4 tấm bìa cùng loại, mỗi tấm bìa được ghi một trong các số 1, 2, 3, 4; hai tấm bìa khác nhau thì ghi hai số khác nhau. Rút ngẫu nhiên đồng thời 3 tấm bìa từ trong hộp.

a) Tính số phần tử của không gian mẫu.

b) Xác định các biến cố sau:

A: "Tổng các số trên ba tấm bìa bằng 9";

B: "Các số trên ba tấm bìa là ba số tự nhiên liên tiếp".

c) Tính $P(A)$, $P(B)$.

3. Hai bạn nữ Hoa, Thảo và hai bạn nam Dũng, Huy được xếp ngồi ngẫu nhiên vào bốn ghế đặt theo hàng dọc. Tính xác suất xếp được:

a) Bạn Thảo ngồi ghế đầu tiên;

b) Bạn Thảo ngồi ghế đầu tiên và bạn Huy ngồi ghế cuối cùng.

4. Có 10 bông hoa màu trắng, 10 bông hoa màu vàng và 10 bông hoa màu đỏ. Người ta chọn ra 4 bông hoa từ các bông hoa trên. Tính xác suất của biến cố "Bốn bông hoa chọn ra có cả ba màu".

BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG VI

Chọn chữ cái đứng trước phương án đúng (từ bài 1 đến bài 2)

1. Cho mẫu số liệu 1 2 4 5 9 10 11

a) Số trung bình cộng của mẫu số liệu trên là:

A. 5. B. 5,5. C. 6. D. 6,5.

b) Trung vị của mẫu số liệu trên là:

A. 5. B. 5,5. C. 6. D. 6,5.

c) Tứ phân vị của mẫu số liệu trên là:

A. $Q_1 = 4, Q_2 = 5, Q_3 = 9$. B. $Q_1 = 1, Q_2 = 5{,}5, Q_3 = 11$.
C. $Q_1 = 1, Q_2 = 5, Q_3 = 11$. D. $Q_1 = 2, Q_2 = 5, Q_3 = 10$.

d) Khoảng biến thiên của mẫu số liệu trên là:

A. 5. B. 6. C. 10. D. 11.

e) Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu trên là:

A. 7. B. 8. C. 9. D. 10.

g) Phương sai của mẫu số liệu trên là:

A. $\sqrt{\frac{96}{7}}$. B. $\frac{96}{7}$. C. 96. D. $\sqrt{96}$.

h) Độ lệch chuẩn của mẫu số liệu trên là:

A. $\sqrt{\frac{96}{7}}$. B. $\frac{96}{7}$. C. 96. D. $\sqrt{96}$.

2. *Bảng 6* thống kê số áo sơ mi nam bán được của một cửa hàng trong một tháng.

Cỡ áo	36	37	38	39	40	41	42
Tần số (Số áo bán được)	28	30	31	47	45	39	32

Bảng 6

Mốt của mẫu số liệu trên là bao nhiêu?

A. 42. B. 47. C. 32. D. 39.

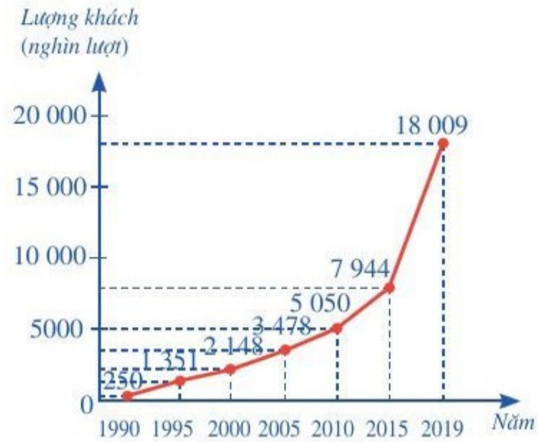
3. Biểu đồ đoạn thẳng ở *Hình 6* cho biết lượng khách du lịch quốc tế đến Việt Nam trong một số năm (từ 1990 đến 2019).

a) Viết mẫu số liệu thống kê số lượt khách du lịch quốc tế đến Việt Nam nhận được từ biểu đồ bên.

b) Viết mẫu số liệu theo thứ tự tăng dần. Tìm số trung bình cộng, trung vị và tứ phân vị của mẫu số liệu đó.

c) Tìm khoảng biến thiên và khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu đó.

d) Tính phương sai và độ lệch chuẩn của mẫu số liệu đó.



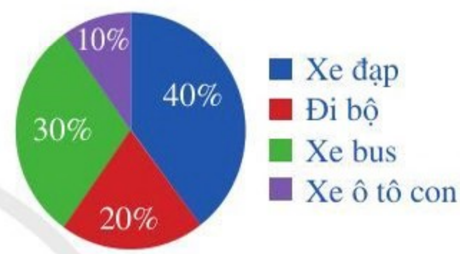
(*Nguồn: https://vietnamtourism.gov.vn*)

Hình 6

4. Lớp 10A có 40 học sinh. Tỉ số phần trăm về phương tiện mà các bạn đến trường được mô tả như biểu đồ ở *Hình 7*.

a) Có bao nhiêu bạn đi xe đạp đến trường?

b) Chọn ngẫu nhiên một bạn để phân công vào đội xung kích của trường. Tính xác suất của biến cố "Bạn được chọn là bạn đến trường bằng xe đạp".



Hình 7

5. Em hãy tìm hiểu chiều cao của tất cả các bạn trong tổ và lập mẫu số liệu với kết quả tăng dần. Với mẫu số liệu đó, hãy tìm

a) Số trung bình cộng, trung vị và tứ phân vị;

b) Khoảng biến thiên và khoảng tứ phân vị;

c) Phương sai và độ lệch chuẩn.

6. Trong một hội thảo quốc tế có 10 chuyên gia đến từ các nước ở châu Á, 12 chuyên gia đến từ các nước ở châu Âu. Chọn ngẫu nhiên 2 chuyên gia vào ban tổ chức. Xác suất để chọn được 2 chuyên gia ở hai châu lục khác nhau vào ban tổ chức là bao nhiêu?

7. Trong một buổi khiêu vũ có đúng 10 cặp vợ chồng. Chọn ngẫu nhiên 2 người lên khiêu vũ đầu tiên. Xác suất để 2 người được chọn là vợ chồng là bao nhiêu?

8 Một lô hàng có 20 sản phẩm bao gồm 16 chính phẩm và 4 phế phẩm. Chọn ngẫu nhiên 3 sản phẩm.

a) Có bao nhiêu kết quả xảy ra khi chọn ngẫu nhiên 3 sản phẩm?

b) Xác suất của biến cố "Cả 3 sản phẩm được chọn là chính phẩm" bằng bao nhiêu?

9. Trong một hộp có 20 chiếc thẻ được viết các số 1, 2, 3, ..., 20 sao cho mỗi thẻ chỉ viết một số và hai thẻ khác nhau viết hai số khác nhau. Chọn ngẫu nhiên 2 chiếc thẻ. Tính xác suất của biến cố "Hai thẻ được chọn có tích của hai số được viết trên đó là số lẻ".

HOẠT ĐỘNG THỰC HÀNH VÀ TRẢI NGHIỆM

Chủ đề 2. XÂY DỰNG MÔ HÌNH HÀM SỐ BẬC NHẤT, BẬC HAI BIỂU DIỄN SỐ LIỆU DẠNG BẢNG

I. NỘI DUNG CHÍNH CỦA CHỦ ĐỀ

1. Mô hình toán học

Những hiện tượng phổ quát trong tự nhiên, trong thực tiễn đời sống của con người được khái quát hoá, "mô hình hoá" thành những khái niệm, định lí, tính chất, ... trong toán học.

Chẳng hạn: dự báo thời tiết, những thay đổi của hệ sinh thái, quy mô dân số, xây dựng chiến lược kinh doanh, diễn biến giá cả của các mặt hàng, ... được mô hình hoá bằng các hàm số hoặc các phương trình trong toán học.

Mục đích của việc xây dựng mô hình toán học cho một hiện tượng phổ quát trong thực tiễn là nhằm hiểu được hiện tượng và dự báo được tiến trình diễn ra của hiện tượng đó trong tương lai.

2. Xây dựng mô hình hàm số biểu diễn số liệu thống kê

Để xây dựng mô hình toán học cho một hiện tượng xảy ra trong thực tiễn, ta sử dụng thống kê. Bằng cách xem xét hiện tượng đó ở những thời điểm khác nhau trong quá khứ, ta thu thập, tổ chức và biểu diễn được một mẫu số liệu thống kê, chẳng hạn ở bảng số liệu thống kê.

Để xây dựng mô hình toán học bằng các hàm số dựa trên mẫu số liệu thống kê, người ta làm như sau:

Bước 1. Lựa chọn cách biểu diễn dữ liệu lên mặt phẳng toạ độ

Bước 2. Căn cứ vào việc biểu diễn dữ liệu trong mặt phẳng toạ độ, lựa chọn hàm số thích hợp

Bước 3. Sử dụng hàm số đã chọn để giải thích và dự đoán hiện tượng xảy ra trong thực tiễn

Bước 4. Kiểm tra và điều chỉnh (nếu cần thiết).

Chú ý: Các mô hình dù khớp với dữ liệu cũng chỉ đưa ra một mô tả gần đúng về hiện tượng xảy ra trong thực tiễn. Vì thế việc kiểm tra và điều chỉnh mô hình là cần thiết.

Ví dụ 1 Một công ty thống kê số sản phẩm bán được mỗi năm từ năm 2017 đến năm 2020 như sau (đơn vị: triệu sản phẩm):

Năm	2017	2018	2019	2020
Doanh số (triệu sản phẩm)	14	22	28	31

Bảng 1

Bằng cách sử dụng hàm số bậc nhất, nêu mô hình toán học biểu diễn số liệu ở *Bảng 1*. Dựa theo mô hình đó, dự đoán số sản phẩm bán được trong các năm 2021, 2022.

Giải

Bước 1. Lựa chọn cách biểu diễn dữ liệu lên mặt phẳng toạ độ.

Đặt $x = t - 2017$ với $t \in \{2017; 2018; 2019; 2020\}$. Ta có $x \in \{0; 1; 2; 3\}$.

Từ *Bảng 1*, ta có bảng thống kê sau:

x	0	1	2	3
Số sản phẩm tương ứng với x (triệu sản phẩm)	14	22	28	31

Bảng 2

Xét các điểm $A(0 ; 14)$, $B(1 ; 22)$, $C(2 ; 28)$ và $D(3 ; 31)$ trong mặt phẳng toạ độ.

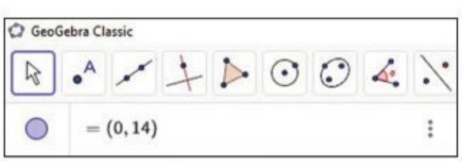
Bước 2. Xem số sản phẩm bán được $f(x)$ là hàm số của x. Ta phải chọn $f(x)$ là hàm số bậc nhất sao cho $f(x)$ dự đoán (càng chính xác càng tốt) số sản phẩm bán được ở những năm sau năm 2020, tức là tính được giá trị của $f(x)$ với $x \geq 4$.

Căn cứ vào bốn điểm $A(0 ; 14)$, $B(1 ; 22)$, $C(2 ; 28)$ và $D(3 ; 31)$, ta chọn hàm số bậc nhất $y = f(x)$ có đồ thị "gần" nhất với bốn điểm trên.

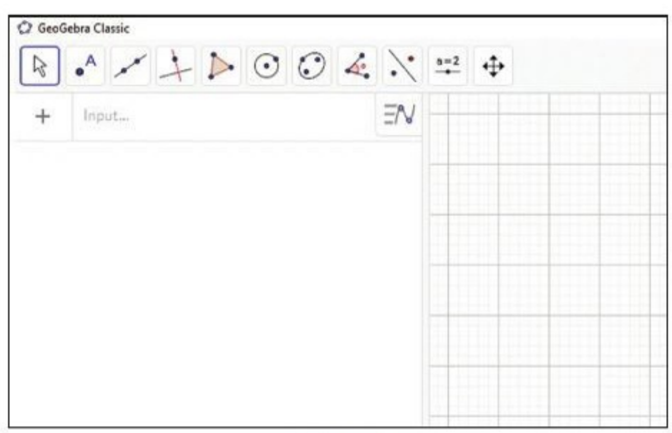
Thông thường việc tính toán trực tiếp để xác định được công thức của hàm số bậc nhất nói trên là không dễ dàng. Người ta dùng các phần mềm toán học để trợ giúp cho quá trình tính toán. Chẳng hạn, ta sử dụng phần mềm GeoGebra để xác định hàm số bậc nhất nói trên như sau:

Vào phần mềm GeoGebra, xuất hiện giao diện như *Hình 1*.

– Vẽ điểm A(0 ; 14) bằng cách dùng câu lệnh "=(0,14)" như *Hình 2*.



Hình 2

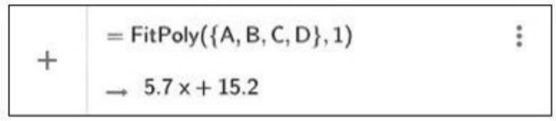


Hình 1

Tương tự, vẽ các điểm B(1 ; 22), C(2 ; 28) và D(3 ; 31) trong mặt phẳng toạ độ bằng cách dùng các câu lệnh: “=(1,22)”; “=(2,28)”; “=(3,31)”.

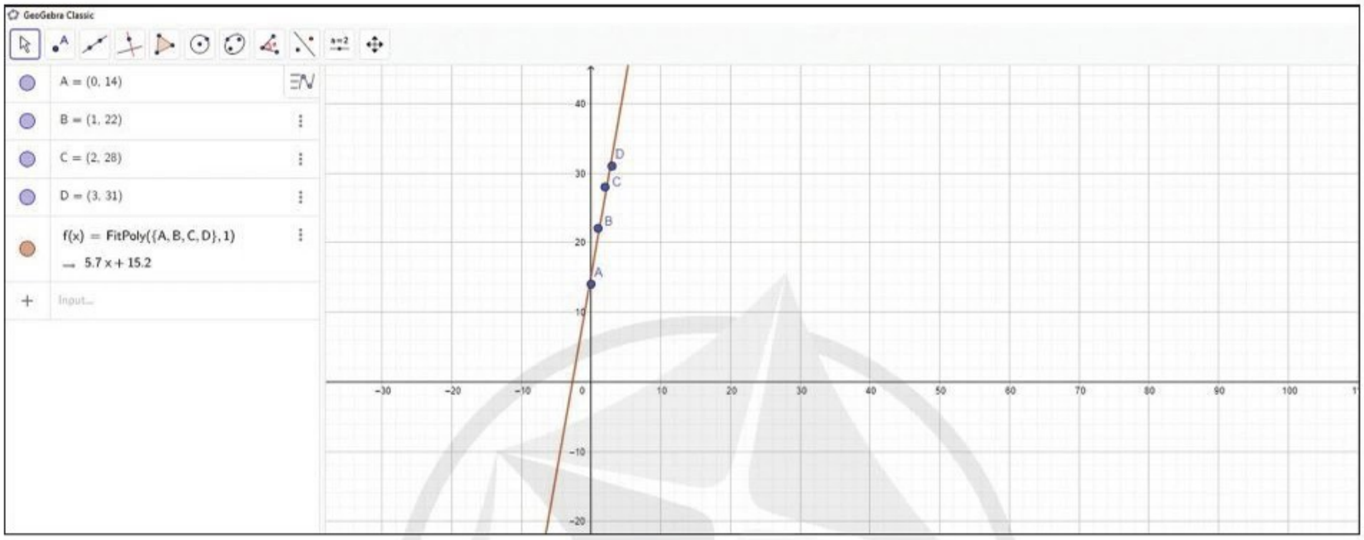
– Sử dụng câu lệnh:

“=FitPoly({A,B,C,D},1)” như *Hình 3* ta được hàm:



Hình 3

f(x) = 5,7x + 15,2 với đồ thị ở *Hình 4*.



Hình 4

Bước 3. Dựa theo mô hình hàm số bậc nhất $f(x) = 5{,}7x + 15{,}2$, ta dự đoán số sản phẩm bán được trong các năm 2021, 2022 lần lượt là:

$$f(4) = 5{,}7 \,.\, 4 + 15{,}2 = 38;$$

$$f(5) = 5{,}7 \,.\, 5 + 15{,}2 = 43{,}7 \approx 44.$$

Bước 4. Dự đoán trên là hợp lí, vì thế ta không cần điều chỉnh mô hình toán học đã chọn.

Ví dụ 2 Một công ty thống kê số sản phẩm bán được mỗi năm từ năm 2017 đến năm 2020 như sau (đơn vị: triệu sản phẩm):

Năm	2017	2018	2019	2020
Doanh số (triệu sản phẩm)	15	25	42	48

Bảng 3

a) Bằng cách sử dụng hàm số bậc hai, nêu mô hình toán học biểu diễn số liệu ở *Bảng 3*. Dựa theo mô hình đó, dự đoán số sản phẩm bán được trong các năm 2021, 2022 và xác định năm bán được nhiều sản phẩm nhất.

b) Dựa theo mô hình toán học trên, công ty có nên công bố sản phẩm mới vào năm 2023 hay không? Vì sao?

Giải

a) *Bước 1.* Lựa chọn cách biểu diễn dữ liệu lên mặt phẳng toạ độ.

Đặt $x = t - 2017$ với $t \in \{2017; 2018; 2019; 2020\}$. Ta có $x \in \{0; 1; 2; 3\}$.

Từ *Bảng 3*, ta có bảng thống kê sau:

x	0	1	2	3
Số sản phẩm tương ứng với x (triệu sản phẩm)	15	25	42	48

Bảng 4

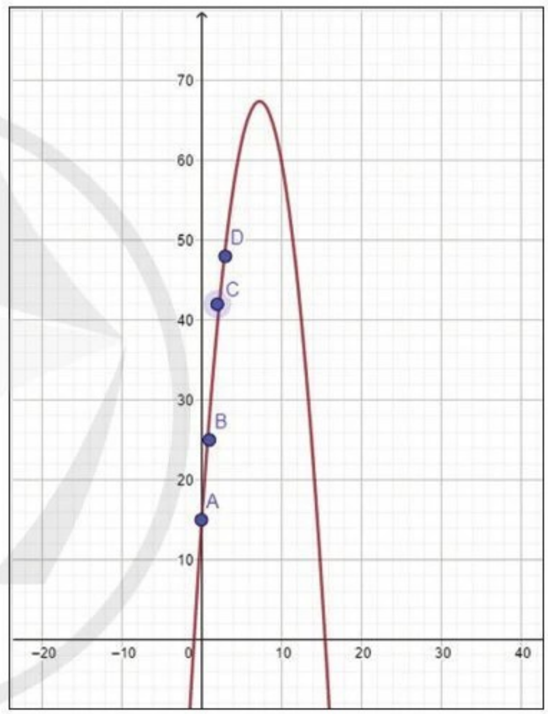
Xét các điểm $A(0 ; 15)$, $B(1 ; 25)$, $C(2 ; 42)$ và $D(3 ; 48)$ trong mặt phẳng toạ độ.

Bước 2. Xem số sản phẩm bán được $f(x)$ là hàm số của x. Ta phải chọn $f(x)$ là hàm số bậc hai sao cho $f(x)$ dự đoán (càng chính xác càng tốt) số sản phẩm bán được ở những năm sau năm 2020, tức là tính được giá trị của $f(x)$ với $x \geq 4$.

Căn cứ vào bốn điểm $A(0 ; 15)$, $B(1 ; 25)$, $C(2 ; 42)$ và $D(3 ; 48)$, ta xác định hàm số bậc hai có đồ thị "gần" nhất với bốn điểm trên.

Tương tự như trong *Ví dụ 1*. Chẳng hạn, ta sử dụng phần mềm GeoGebra để xác định hàm số bậc hai nói trên như sau:

– Vẽ các điểm A(0 ; 15), B(1 ; 25), C(2 ; 42) và D(3 ; 48) trong mặt phẳng toạ độ bằng cách dùng các câu lệnh: "=(0,15)"; "=(1,25)"; "=(2,42)"; "=(3,48)".



Hình 5

– Sử dụng câu lệnh "=FitPoly({A,B,C,D},2)" ta được hàm: $f(x) = -x^2 + 14,6x + 14,1$ với đồ thị ở *Hình 5*.

Bước 3. Dựa theo mô hình hàm số bậc hai $f(x) = -x^2 + 14,6x + 14,1$, ta có thể:

- Dự đoán số sản phẩm bán được trong các năm 2021, 2022 lần lượt là:

  $f(4) = -4^2 + 14,6 . 4 + 14,1 = 56,5 \approx 57$; $f(5) = -5^2 + 14,6 . 5 + 14,1 = 62,1 \approx 62$.

- Đồ thị hàm số bậc hai có hoành độ đỉnh là 7,3 và

  $f(7) = -7^2 + 14,6 . 7 + 14,1 = 67,3 \approx 67$; $f(8) = -8^2 + 14,6 . 8 + 14,1 = 66,9 \approx 67$.

Vậy khi $x = 7$ (tức là năm $2017 + 7 = 2024$) hoặc khi $x = 8$ (tức là năm $2017 + 8 = 2025$) công ty sẽ bán được nhiều sản phẩm nhất là (khoảng) 67 triệu sản phẩm.

Bước 4. Dự đoán trên là hợp lí, vì thế ta không cần điều chỉnh mô hình toán học đã chọn.

b) Dựa theo mô hình hàm số bậc hai, ta thấy số lượng sản phẩm bán được vẫn trong xu hướng tăng đến năm 2025. Vì thế, không nên thay đổi mẫu sản phẩm đó bằng mẫu sản phẩm mới. Vậy công ty không nên công bố sản phẩm mới vào năm 2023.

3. Ý nghĩa của xây dựng mô hình toán học

Con người nhận thức một hiện tượng xảy ra trong thực tiễn thông qua những dữ liệu thông tin thu thập được tại hữu hạn thời điểm. Do đó dữ liệu thu thập được thường có tính rời rạc, không đủ để phản ánh tiến trình diễn ra của hiện tượng đó theo thời gian liên tục. Việc xây dựng mô hình toán học cho phép chúng ta khắc phục điều đó. Nhờ vậy, chúng ta có thể hiểu được bản chất hiện tượng và dự báo được tiến trình diễn ra của hiện tượng đó trong tương lai.

II. GỢI Ý TỔ CHỨC CÁC HOẠT ĐỘNG THỰC HÀNH VÀ TRẢI NGHIỆM

1 Học sinh được chia theo nhóm. Mỗi nhóm lựa chọn dữ liệu (quy mô dân số của địa phương; nhiệt độ vào các tháng ở địa phương; số giờ tự học và điểm số tương ứng; nhu cầu về một loại sản phẩm; ...) và phân công thu thập dữ liệu. Sau đó mỗi nhóm điền kết quả thu thập dữ liệu vào bảng.

Sau đây là mẫu nếu lựa chọn dữ liệu là nhiệt độ vào các tháng của địa phương.

Tháng	?	?	?	?
Nhiệt độ	?	?	?	?

2 Mỗi nhóm thực hành xây dựng mô hình toán học dạng hàm số bậc nhất hoặc hàm số bậc hai để biểu diễn số liệu ở bảng thống kê theo các bước đã nêu ở mục I.2.

III. ĐÁNH GIÁ

Giáo viên tiến hành tổng kết, rút kinh nghiệm và đánh giá.

Hình thức đánh giá: Theo hình thức đánh giá của học tập dự án.

1. Đánh giá hoạt động cá nhân

• Mỗi cá nhân tự đánh giá vào phiếu cá nhân.

• Nhóm đánh giá từng thành viên trong nhóm vào phiếu đánh giá cá nhân.

2. Đánh giá hoạt động và sản phẩm của nhóm

• Nhóm tự đánh giá lại hoạt động của nhóm và cho điểm vào phiếu đánh giá hoạt động của nhóm.

• Giáo viên và các nhóm đánh giá và cho điểm phần trình bày của từng nhóm vào phiếu đánh giá hoạt động nhóm.

CHƯƠNG VII PHƯƠNG PHÁP TOẠ ĐỘ TRONG MẶT PHẲNG

Trong chương này, chúng ta sẽ tìm hiểu những nội dung sau: toạ độ của vectơ, phương trình đường thẳng, phương trình đường tròn, phương trình ba đường conic trong mặt phẳng toạ độ.

§1 TOẠ ĐỘ CỦA VECTƠ

Hình 1 minh hoạ hoạt động của một màn hình ra đa ở trạm kiểm soát không lưu của sân bay, đang theo dõi một máy bay hạ cánh. Máy bay xuất hiện trên màn hình ra đa bởi một đốm sáng, kí hiệu là M. Dựa trên sự thay đổi của toạ độ vectơ $\overrightarrow{OM}$, trạm kiểm soát có thể xác định được đường bay của máy bay.

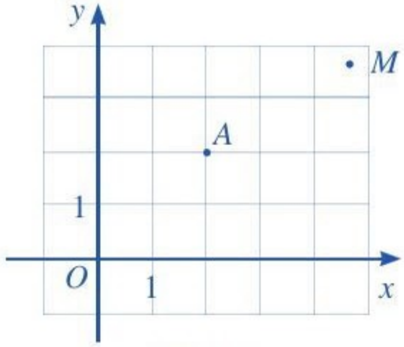
Hình 1

I. TOẠ ĐỘ CỦA MỘT ĐIỂM

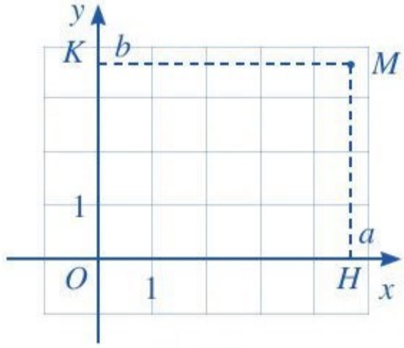
1 Trong mặt phẳng toạ độ Oxy (*Hình 2*), hãy:

a) Tìm hoành độ và tung độ của điểm A.

b) Nêu cách xác định toạ độ của điểm M tuỳ ý.



Hình 2



Hình 3

Để xác định toạ độ của một điểm M tuỳ ý trong mặt phẳng toạ độ Oxy, ta làm như sau (*Hình 3*):

• Từ M kẻ đường thẳng vuông góc với trục hoành và cắt trục hoành tại điểm H ứng với số a. Số a là hoành độ của điểm M.

• Từ M kẻ đường thẳng vuông góc với trục tung và cắt trục tung tại điểm K ứng với số b. Số b là tung độ của điểm M.

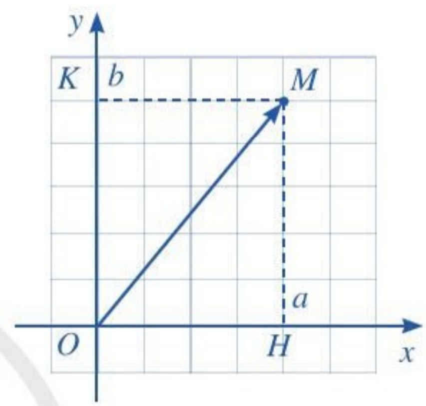
Cặp số $(a\ ;\ b)$ là toạ độ của điểm M trong mặt phẳng toạ độ Oxy. Ta kí hiệu là $M(a\ ;\ b)$.

II. TOẠ ĐỘ CỦA MỘT VECTƠ

2 Cho điểm M trong mặt phẳng toạ độ Oxy.

a) Vẽ vectơ $\overrightarrow{OM}$.

b) Nêu cách xác định toạ độ của điểm M.



Hình 4

> Toạ độ của điểm M được gọi là toạ độ của vectơ $\overrightarrow{OM}$.

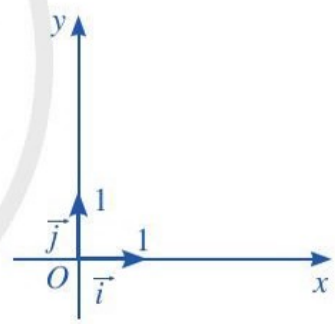
Nếu $\overrightarrow{OM}$ có toạ độ $(a\ ;\ b)$ thì ta viết $\overrightarrow{OM} = (a\ ;\ b)$ hay $\overrightarrow{OM}(a\ ;\ b)$, trong đó a gọi là hoành độ của vectơ $\overrightarrow{OM}$ và b gọi là tung độ của vectơ $\overrightarrow{OM}$ (*Hình 4*).

Chú ý: Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, ta có:

• $\overrightarrow{OM} = (a\ ;\ b) \Leftrightarrow M(a\ ;\ b)$.

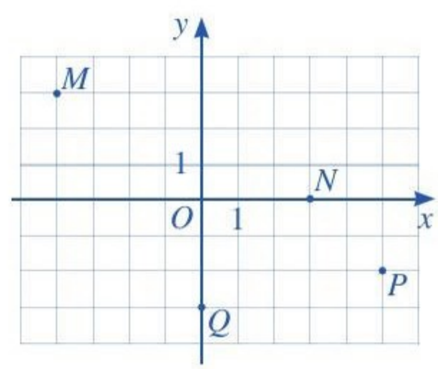
• Vectơ $\vec{i}$ có điểm gốc là O và có toạ độ $(1\ ;\ 0)$ gọi là *vectơ đơn vị* trên trục Ox.

Vectơ $\vec{j}$ có điểm gốc là O và có toạ độ $(0\ ;\ 1)$ gọi là *vectơ đơn vị* trên trục Oy (*Hình 5*).



Hình 5

Ví dụ 1 Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho các điểm M, N, P, Q (*Hình 6*). Tìm toạ độ của các vectơ $\overrightarrow{OM}$, $\overrightarrow{ON}$, $\overrightarrow{OP}$, $\overrightarrow{OQ}$.



Hình 6

Giải

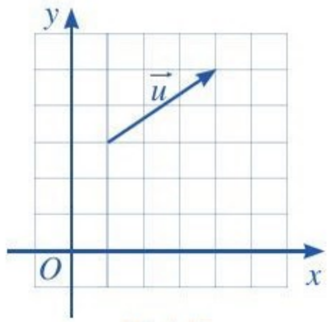
Từ *Hình 6*, ta có: $M(-4\ ;\ 3)$, $N(3\ ;\ 0)$, $P(5\ ;\ -2)$, $Q(0\ ;\ -3)$.

Do đó: $\overrightarrow{OM} = (-4\ ;\ 3)$, $\overrightarrow{ON} = (3\ ;\ 0)$,

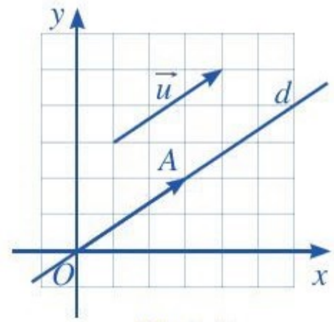
$\overrightarrow{OP} = (5\ ;\ -2)$, $\overrightarrow{OQ} = (0\ ;\ -3)$.

3 Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho vectơ $\vec{u}$ (*Hình 7*). Hãy xác định điểm A sao cho $\overrightarrow{OA} = \vec{u}$.

Để xác định điểm A, ta làm như sau (*Hình 8*):



Hình 7



Hình 8

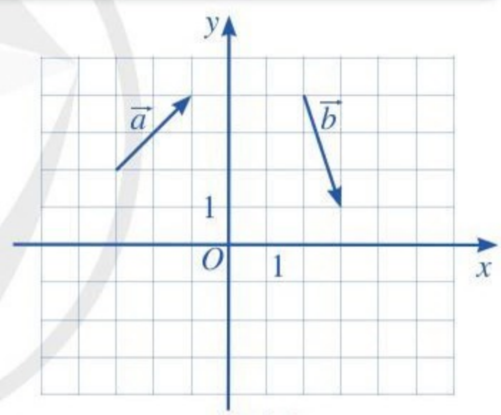
• Qua O kẻ đường thẳng d song song với giá của vectơ $\vec{u}$.

• Lấy điểm A trên đường thẳng d sao cho hai vectơ $\overrightarrow{OA}$, $\vec{u}$ cùng hướng và độ dài đoạn thẳng OA bằng độ dài vectơ $\vec{u}$.

Nhận xét: Với mỗi vectơ $\vec{u}$, ta xác định được duy nhất một điểm A sao cho $\overrightarrow{OA} = \vec{u}$.

Với mỗi vectơ $\vec{u}$ trong mặt phẳng toạ độ Oxy, toạ độ của vectơ $\vec{u}$ là toạ độ của điểm A, trong đó A là điểm sao cho $\overrightarrow{OA} = \vec{u}$.

Nếu $\vec{u}$ có toạ độ $(a\ ;\ b)$ thì ta viết $\vec{u} = (a\ ;\ b)$ hay $\vec{u}\,(a\ ;\ b)$, trong đó a gọi là hoành độ của vectơ $\vec{u}$ và b gọi là tung độ của vectơ $\vec{u}$.



Hình 9

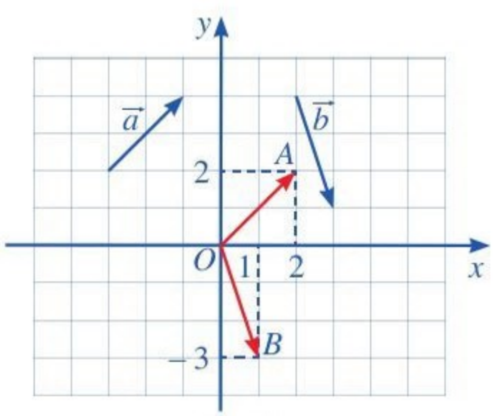
Ví dụ 2 Tìm toạ độ của các vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$ ở *Hình 9*.

Giải

Trong *Hình 10*, ta có:

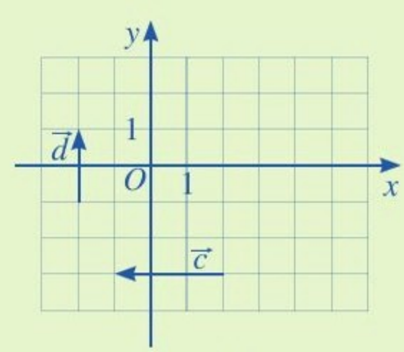
+) $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$ và $A(2\ ;\ 2)$; toạ độ vectơ $\overrightarrow{OA}$ chính là toạ độ điểm A nên $\vec{a} = (2\ ;\ 2)$.

+) $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$ và $B(1\ ;\ -3)$; toạ độ vectơ $\overrightarrow{OB}$ chính là toạ độ điểm B nên $\vec{b} = (1\ ;\ -3)$.



Hình 10

1 Tìm toạ độ của các vectơ $\vec{c}$, $\vec{d}$ trong *Hình 11*.



Hình 11

4 Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho vectơ $\vec{u} = (a ; b)$. Ta chọn điểm A sao cho $\overrightarrow{OA} = \vec{u}$.

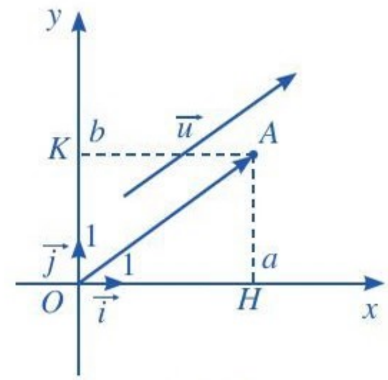
Xét vectơ đơn vị $\vec{i}$ trên trục hoành Ox và vectơ đơn vị trên trục tung Oy (*Hình 12*).

a) Tìm hoành độ và tung độ của điểm A.

b) Biểu diễn vectơ $\overrightarrow{OH}$ qua vectơ $\vec{i}$.

c) Biểu diễn vectơ $\overrightarrow{OK}$ qua vectơ $\vec{j}$.

d) Chứng tỏ rằng $\vec{u} = a\vec{i} + b\vec{j}$.



Hình 12

Do $(a ; b)$ là toạ độ của vectơ $\vec{u}$ nên điểm A có hoành độ là a và tung độ là b. Điểm H biểu diễn số a trên trục Ox nên $\overrightarrow{OH} = a\vec{i}$; điểm K biểu diễn số b trên trục Oy nên $\overrightarrow{OK} = b\vec{j}$. Ta có:

$$\vec{u} = \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OH} + \overrightarrow{OK} = a\vec{i} + b\vec{j}.$$

Ta có định lí sau:

Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, nếu $\vec{u} = (a ; b)$ thì $\vec{u} = a\vec{i} + b\vec{j}$.
Ngược lại, nếu $\vec{u} = a\vec{i} + b\vec{j}$ thì $\vec{u} = (a ; b)$.

Chú ý: Với $\vec{a} = (x_1 ; y_1)$ và $\vec{b} = (x_2 ; y_2)$, ta có: $\vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 \\ y_1 = y_2. \end{cases}$

Như vậy, mỗi vectơ hoàn toàn được xác định khi biết toạ độ của nó.

Ví dụ 3 Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho điểm $A(1 ; 2)$ và vectơ $\vec{u} = (3 ; -4)$.

a) Biểu diễn vectơ $\vec{u}$ qua vectơ $\vec{i}$ và $\vec{j}$.

b) Biểu diễn vectơ $\overrightarrow{OA}$ qua vectơ $\vec{i}$ và $\vec{j}$.

Giải

a) Vì $\vec{u} = (3 ; -4)$ nên $\vec{u} = 3\vec{i} + (-4)\vec{j} = 3\vec{i} - 4\vec{j}$.

b) Vì điểm A có toạ độ là $(1 ; 2)$ nên $\overrightarrow{OA} = (1 ; 2)$. Do đó:

$$\overrightarrow{OA} = 1\vec{i} + 2\vec{j} = \vec{i} + 2\vec{j}.$$

2 Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho điểm $B(-1 ; 0)$ và vectơ $\vec{v} = (0 ; -7)$.

a) Biểu diễn vectơ $\vec{v}$ qua vectơ $\vec{i}$ và $\vec{j}$.

b) Biểu diễn vectơ $\overrightarrow{OB}$ qua vectơ $\vec{i}$ và $\vec{j}$.

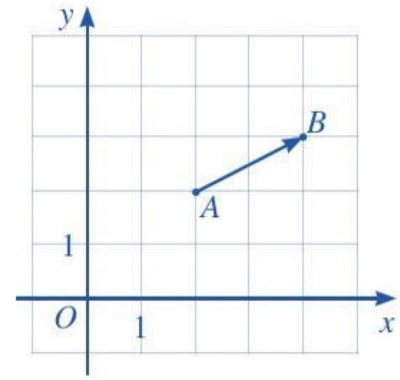
III. LIÊN HỆ GIỮA TOẠ ĐỘ CỦA ĐIỂM VÀ TOẠ ĐỘ CỦA VECTƠ

5 Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho hai điểm A, B (*Hình 13*).

a) Tìm hoành độ x_A và tung độ y_A của điểm A; hoành độ x_B và tung độ y_B của điểm B.

b) Tìm điểm M sao cho $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{AB}$. Từ đó, tìm hoành độ a và tung độ b của vectơ $\overrightarrow{AB}$.

c) So sánh: $x_B - x_A$ và a; $y_B - y_A$ và b.



Hình 13

Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho hai điểm $A(x_A ; y_A)$ và $B(x_B ; y_B)$.

Ta có: $\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A ; y_B - y_A)$.

Ví dụ 4 Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho ba điểm không thẳng hàng $A(1 ; 1)$, $B(4 ; 3)$, $C(-1 ; -2)$.

a) Tìm toạ độ của vectơ $\overrightarrow{AB}$.

b) Tìm toạ độ của điểm D sao cho tứ giác $ABCD$ là hình bình hành.

Giải

a) Ta có: $\overrightarrow{AB} = (4 - 1 ; 3 - 1)$. Vậy $\overrightarrow{AB} = (3 ; 2)$.

b) Gọi toạ độ của điểm D là $(x_D ; y_D)$, ta có: $\overrightarrow{DC} = (-1 - x_D ; -2 - y_D)$.

Tứ giác $ABCD$ là hình bình hành khi và chỉ khi

$$\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \overrightarrow{DC} = (3 ; 2) \Leftrightarrow \begin{cases} -1 - x_D = 3 \\ -2 - y_D = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_D = -4 \\ y_D = -4. \end{cases}$$

Vậy $D(-4 ; -4)$.

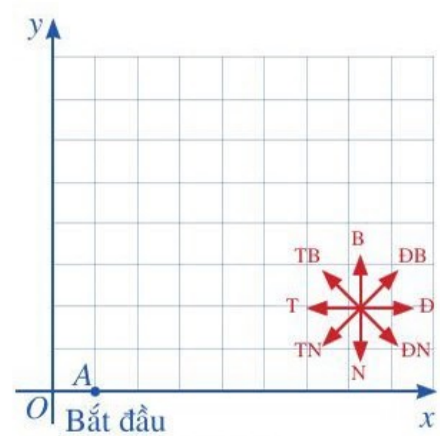
3 Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho các điểm:

$A(1 ; 3)$, $B(5 ; -1)$,
$C(2 ; -2)$, $D(-2 ; 2)$.

Chứng minh $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.

Ví dụ 5 Trong một bài luyện tập của các cầu thủ bóng nước, huấn luyện viên cho các cầu thủ di chuyển theo ba đoạn liên tiếp. Đoạn thứ nhất di chuyển về hướng Đông Bắc với quãng đường là 20 m; đoạn thứ hai di chuyển về hướng Tây Bắc với quãng đường là 10 m và đoạn thứ ba di chuyển theo hướng Đông Bắc với quãng đường 5 m.

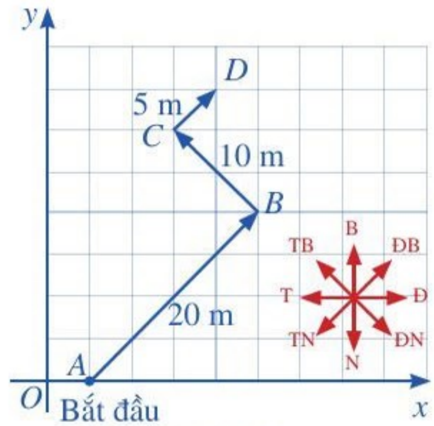
a) Vẽ các vectơ biểu diễn sự di chuyển của các cầu thủ trong hệ trục toạ độ Oxy với vị trí bắt đầu như *Hình 14*,



Hình 14

trong đó ta quy ước độ dài đường chéo của mỗi ô vuông là 5 m.

b) Tìm toạ độ của các vectơ trên.



Hình 15

Giải

a) Trong *Hình 15,* ta thấy các vectơ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$ lần lượt biểu diễn sự di chuyển theo đoạn thứ nhất; đoạn thứ hai; đoạn thứ ba của các cầu thủ.

b) Do độ dài đường chéo của mỗi ô vuông là 5 m nên độ dài cạnh của mỗi ô vuông là $\frac{5\sqrt{2}}{2}$ m. Dựa vào số ô vuông, ta có:

$$A\left(\frac{5\sqrt{2}}{2}; 0\right); \qquad B\left(\frac{25\sqrt{2}}{2}; 10\sqrt{2}\right);$$

$$C\left(\frac{15\sqrt{2}}{2}; 15\sqrt{2}\right); \qquad D\left(10\sqrt{2}; \frac{35\sqrt{2}}{2}\right).$$

Do đó

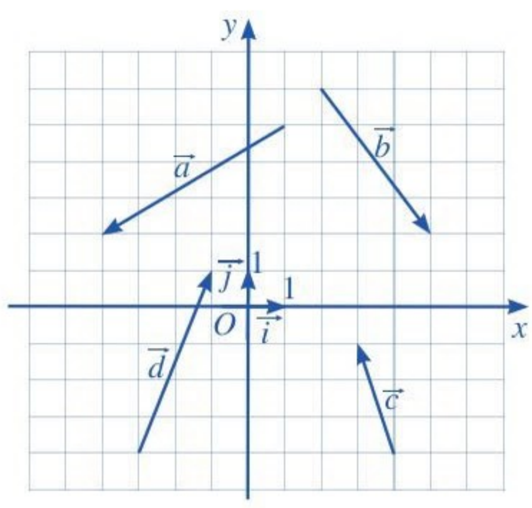
$$\overrightarrow{AB} = \left(\frac{25\sqrt{2}}{2} - \frac{5\sqrt{2}}{2}; 10\sqrt{2} - 0\right), \text{ tức là } \overrightarrow{AB} = (10\sqrt{2}; 10\sqrt{2});$$

$$\overrightarrow{BC} = \left(\frac{15\sqrt{2}}{2} - \frac{25\sqrt{2}}{2}; 15\sqrt{2} - 10\sqrt{2}\right), \text{ tức là } \overrightarrow{BC} = (-5\sqrt{2}; 5\sqrt{2});$$

$$\overrightarrow{CD} = \left(10\sqrt{2} - \frac{15\sqrt{2}}{2}; \frac{35\sqrt{2}}{2} - 15\sqrt{2}\right), \text{ tức là } \overrightarrow{CD} = \left(\frac{5\sqrt{2}}{2}; \frac{5\sqrt{2}}{2}\right).$$

BÀI TẬP

1. Tìm toạ độ của các vectơ trong *Hình 16* và biểu diễn mỗi vectơ đó qua vectơ $\vec{i}$ và $\vec{j}$.



Hình 16

2. Tìm toạ độ của các vectơ sau:

a) $\vec{a} = 3\vec{i}$; b) $\vec{b} = -\vec{j}$;

c) $\vec{c} = \vec{i} - 4\vec{j}$; d) $\vec{d} = 0{,}5\vec{i} + \sqrt{6}\vec{j}$.

3. Tìm các số thực a và b sao cho mỗi cặp vectơ sau bằng nhau.

a) $\vec{u} = (2a - 1; -3)$ và $\vec{v} = (3; 4b + 1)$;

b) $\vec{x} = (a + b; -2a + 3b)$ và $\vec{y} = (2a - 3; 4b)$.

4. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho ba điểm $A(2 ; 3)$, $B(-1 ; 1)$, $C(3 ; -1)$.

a) Tìm toạ độ điểm M sao cho $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{BC}$.

b) Tìm toạ độ trung điểm N của đoạn thẳng AC. Chứng minh $\overrightarrow{BN} = \overrightarrow{NM}$.

5. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho điểm $M(-1 ; 3)$.

a) Tìm toạ độ điểm A đối xứng với điểm M qua gốc O.

b) Tìm toạ độ điểm B đối xứng với điểm M qua trục Ox.

c) Tìm toạ độ điểm C đối xứng với điểm M qua trục Oy.

6. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho ba điểm không thẳng hàng $A(-3 ; 1)$, $B(-1 ; 3)$, $I(4 ; 2)$. Tìm toạ độ của hai điểm C, D sao cho tứ giác $ABCD$ là hình bình hành nhận I làm tâm đối xứng.

7. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho tam giác ABC. Các điểm $M(1 ; -2)$, $N(4 ; -1)$ và $P(6 ; 2)$ lần lượt là trung điểm của các cạnh BC, CA, AB. Tìm toạ độ của các điểm A, B, C.

TÌM HIỂU THÊM

Chứng minh công thức tính toạ độ của vectơ qua toạ độ của điểm đầu và điểm cuối

Trong Mục III, ta đã phát biểu khẳng định sau:

Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho hai điểm $A(x_A ; y_A)$ và $B(x_B ; y_B)$. Ta có:

$$\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A ;\ y_B - y_A).$$

Khẳng định trên có thể chứng minh như sau:

Vì $\overrightarrow{OA} = (x_A ; y_A)$ nên $\overrightarrow{OA} = x_A\vec{i} + y_A\vec{j}$.

Vì $\overrightarrow{OB} = (x_B ; y_B)$ nên $\overrightarrow{OB} = x_B\vec{i} + y_B\vec{j}$.

Do đó

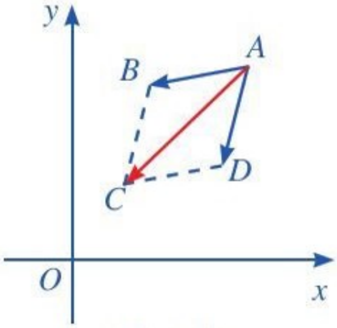
$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (x_B\vec{i} + y_B\vec{j}) - (x_A\vec{i} + y_A\vec{j}) = (x_B\vec{i} - x_A\vec{i}) + (y_B\vec{j} - y_A\vec{j})$$
$$= (x_B - x_A)\vec{i} + (y_B - y_A)\vec{j}.$$

Vậy $\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A ; y_B - y_A)$.

§2 BIỂU THỨC TOẠ ĐỘ CỦA CÁC PHÉP TOÁN VECTƠ

Hai máy tời kéo tàu biển được đặt ở hai vị trí B và D dọc theo kênh đào được minh hoạ ở *Hình 17*. Hai máy tời đó kéo một con tàu từ vị trí A hướng đến vị trí C.

Kênh đào Panama
(*Nguồn: https://shutterstock.com*)



Hình 17

Làm thế nào tìm được toạ độ của vị trí C khi biết toạ độ của các vị trí A, B và D?

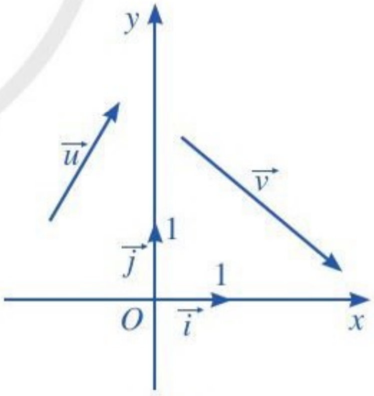
I. BIỂU THỨC TOẠ ĐỘ CỦA PHÉP CỘNG HAI VECTƠ, PHÉP TRỪ HAI VECTƠ, PHÉP NHÂN MỘT SỐ VỚI MỘT VECTƠ

1 Trong mặt phẳng toạ độ Oxy (*Hình 18*), cho hai vectơ $\vec{u} = (x_1 ; y_1)$ và $\vec{v} = (x_2 ; y_2)$.

a) Biểu diễn các vectơ $\vec{u}$, $\vec{v}$ theo hai vectơ $\vec{i}$ và $\vec{j}$.

b) Biểu diễn các vectơ $\vec{u} + \vec{v}$, $\vec{u} - \vec{v}$, $k\vec{u}$ $(k \in \mathbb{R})$ theo hai vectơ $\vec{i}$ và $\vec{j}$.

c) Tìm toạ độ các vectơ $\vec{u} + \vec{v}$, $\vec{u} - \vec{v}$, $k\vec{u}$ $(k \in \mathbb{R})$.



Hình 18

Để biểu diễn vectơ $\vec{u} + \vec{v}$ theo hai vectơ $\vec{i}$ và $\vec{j}$, ta làm như sau:

Do $\vec{u} = (x_1 ; y_1)$, $\vec{v} = (x_2 ; y_2)$ nên $\vec{u} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j}$, $\vec{v} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j}$. Vì vậy,

$$\vec{u} + \vec{v} = (x_1\vec{i} + y_1\vec{j}) + (x_2\vec{i} + y_2\vec{j}) = (x_1\vec{i} + x_2\vec{i}) + (y_1\vec{j} + y_2\vec{j})$$
$$= (x_1 + x_2)\vec{i} + (y_1 + y_2)\vec{j}.$$

Tương tự, ta có các biểu diễn sau:

$$\vec{u} - \vec{v} = (x_1 - x_2)\vec{i} + (y_1 - y_2)\vec{j} ;\ k\vec{u} = (kx_1)\vec{i} + (ky_1)\vec{j} \ (k \in \mathbb{R}).$$

Nếu $\vec{u} = (x_1 ; y_1)$ và $\vec{v} = (x_2 ; y_2)$ thì

$$\vec{u} + \vec{v} = (x_1 + x_2 ; y_1 + y_2);$$
$$\vec{u} - \vec{v} = (x_1 - x_2 ; y_1 - y_2);$$
$$k\vec{u} = (kx_1 ; ky_1) \text{ với } k \in \mathbb{R}.$$

Nhận xét: Hai vectơ $\vec{u} = (x_1 ; y_1)$, $\vec{v} = (x_2 ; y_2)$ $(\vec{v} \neq \vec{0})$ cùng phương khi và chỉ khi có một số thực k sao cho $x_1 = kx_2$ và $y_1 = ky_2$.

Ví dụ 1 Cho $\vec{u} = (2 ; -1)$, $\vec{v} = (1 ; 5)$. Tìm toạ độ của mỗi vectơ sau:

a) $\vec{u} + \vec{v}$; b) $\vec{u} - \vec{v}$.

Giải

Do $\vec{u} = (2 ; -1)$, $\vec{v} = (1 ; 5)$ nên ta có:

a) $\vec{u} + \vec{v} = (2 + 1 ; -1 + 5)$. Vậy $\vec{u} + \vec{v} = (3 ; 4)$.

b) $\vec{u} - \vec{v} = (2 - 1 ; -1 - 5)$. Vậy $\vec{u} - \vec{v} = (1 ; -6)$.

1 a) Cho $\vec{u} = (-2 ; 0)$, $\vec{v} = (0 ; 6)$, $\vec{w} = (-2 ; 3)$.

Tìm toạ độ của vectơ $\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}$.

b) Cho $\vec{u} = (\sqrt{3} ; 0)$, $\vec{v} = (0 ; -\sqrt{7})$.

Tìm toạ độ của vectơ $\vec{w}$ sao cho $\vec{w} + \vec{u} = \vec{v}$.

Ví dụ 2 Cho $\vec{a} = (-2 ; 3)$, $\vec{b} = (2 ; 1)$, $\vec{c} = (1 ; 2)$. Tính toạ độ của mỗi vectơ sau: $3\vec{a}$; $2\vec{a} - \vec{b}$; $\vec{a} + 2\vec{b} - \frac{3}{2}\vec{c}$.

Giải

Do $\vec{a} = (-2 ; 3)$, $\vec{b} = (2 ; 1)$, $\vec{c} = (1 ; 2)$ nên ta có:

+) $3\vec{a} = (3 . (-2) ; 3 . 3)$. Vậy $3\vec{a} = (-6 ; 9)$.

+) $2\vec{a} = (-4 ; 6)$.

Do đó $2\vec{a} - \vec{b} = (-4 - 2 ; 6 - 1)$, vì vậy $2\vec{a} - \vec{b} = (-6 ; 5)$.

+) $2\vec{b} = (4 ; 2)$, $\vec{a} + 2\vec{b} = (2 ; 5)$ và $-\frac{3}{2}\vec{c} = \left(-\frac{3}{2} ; -3\right)$.

Do đó $\vec{a} + 2\vec{b} - \frac{3}{2}\vec{c} = \left(\frac{1}{2} ; 2\right)$.

Ví dụ 3 Cho ba điểm $A(-1 ; -3)$, $B(2 ; 3)$ và $C(3 ; 5)$. Chứng minh ba điểm A, B, C thẳng hàng.

Giải

Ta có: $\overrightarrow{AB} = (3 ; 6)$, $\overrightarrow{BC} = (1 ; 2)$. Suy ra $\overrightarrow{AB} = 3\overrightarrow{BC}$. Vậy ba điểm A, B, C thẳng hàng.

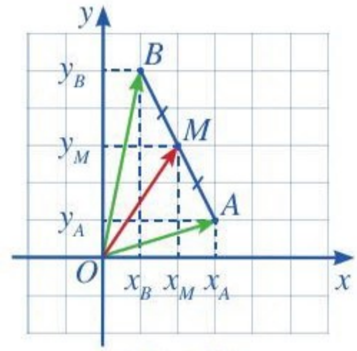
2 Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho ba điểm $A(-1 ; 2)$, $B(2 ; 3)$, $C(-4 ; m)$. Tìm m để ba điểm A, B, C thẳng hàng.

II. TOẠ ĐỘ TRUNG ĐIỂM ĐOẠN THẲNG VÀ TOẠ ĐỘ TRỌNG TÂM TAM GIÁC

2 Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho hai điểm $A(x_A ; y_A)$ và $B(x_B ; y_B)$. Gọi $M(x_M ; y_M)$ là trung điểm của đoạn thẳng AB (minh hoạ ở *Hình 19*).

a) Biểu diễn vectơ $\overrightarrow{OM}$ theo hai vectơ $\overrightarrow{OA}$ và $\overrightarrow{OB}$.

b) Tính toạ độ của M theo toạ độ của A và B.



Hình 19

Cho hai điểm $A(x_A ; y_A)$ và $B(x_B ; y_B)$. Nếu $M(x_M ; y_M)$ là trung điểm đoạn thẳng AB thì

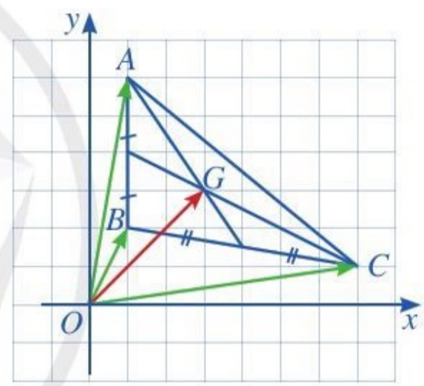
$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2};\ y_M = \frac{y_A + y_B}{2}.$$

3 Cho hai điểm $A(2 ; 4)$ và $M(5 ; 7)$. Tìm toạ độ điểm B sao cho M là trung điểm đoạn thẳng AB.

3 Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho tam giác ABC có trọng tâm G (minh hoạ ở *Hình 20*).

a) Biểu diễn vectơ $\overrightarrow{OG}$ theo ba vectơ $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ và $\overrightarrow{OC}$.

b) Tính toạ độ của G theo toạ độ của A, B, C.



Hình 20

Cho tam giác ABC có $A(x_A ; y_A)$, $B(x_B ; y_B)$, $C(x_C ; y_C)$. Nếu $G(x_G ; y_G)$ là trọng tâm tam giác ABC thì

$$x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3};\ y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3}.$$

Ví dụ 4 Cho tam giác ABC có $A(-2 ; 1)$, $B(2 ; 5)$, $C(5 ; 2)$. Tìm toạ độ trung điểm M của đoạn thẳng AB và trọng tâm G của tam giác ABC.

Giải

Do $M(x_M ; y_M)$ là trung điểm đoạn thẳng AB nên

$$x_M = \frac{-2+2}{2} = 0;\ y_M = \frac{1+5}{2} = 3.$$

Vậy $M(0 ; 3)$.

Do $G(x_G ; y_G)$ là trọng tâm tam giác ABC nên $x_G = \dfrac{(-2)+2+5}{3};\ y_G = \dfrac{1+5+2}{3}$.

Vậy $G\left(\dfrac{5}{3} ; \dfrac{8}{3}\right)$.

4 Cho ba điểm $A(-1 ; 1)$, $B(1 ; 5)$, $G(1 ; 2)$.

a) Chứng minh ba điểm A, B, G không thẳng hàng.

b) Tìm toạ độ điểm C sao cho G là trọng tâm của tam giác ABC.

III. BIỂU THỨC TOẠ ĐỘ CỦA TÍCH VÔ HƯỚNG

4 Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho $\vec{i}$ và $\vec{j}$ là các vectơ đơn vị trên Ox và Oy.

a) Tính $\vec{i}^2$; $\vec{j}^2$; $\vec{i}\,.\,\vec{j}$.

b) Cho $\vec{u} = (x_1\,;y_1)$, $\vec{v} = (x_2\,;y_2)$. Tính tích vô hướng $\vec{u}\,.\,\vec{v}$.

Để tính các tích vô hướng nói trên, ta làm như sau:

Ta có: $\vec{i}^2 = \left|\vec{i}\right|^2 = 1$; $\vec{j}^2 = \left|\vec{j}\right|^2 = 1$; $\vec{i}\,.\,\vec{j} = 0$ (vì $\vec{i} \perp \vec{j}$). Do đó

$$\vec{u}\,.\,\vec{v} = (x_1\vec{i} + y_1\vec{j})\,.\,(x_2\vec{i} + y_2\vec{j}) = x_1x_2\,.\,\vec{i}^2 + x_1y_2\,.\,\vec{i}\,.\,\vec{j} + x_2y_1\,.\,\vec{j}\,.\,\vec{i} + y_1y_2\,.\,\vec{j}^2$$
$$= x_1x_2 + y_1y_2.$$

Nếu $\vec{u} = (x_1\,;y_1)$ và $\vec{v} = (x_2\,;y_2)$ thì $\vec{u}\,.\,\vec{v} = x_1x_2 + y_1y_2$.

Nhận xét

a) Nếu $\vec{a} = (x\,;y)$ thì $|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}\,.\,\vec{a}} = \sqrt{x^2 + y^2}$.

b) Nếu $A(x_1\,;y_1)$ và $B(x_2\,;y_2)$ thì $AB = \left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$.

c) Với hai vectơ $\vec{u} = (x_1\,;y_1)$ và $\vec{v} = (x_2\,;y_2)$ đều khác $\vec{0}$, ta có:

- $\vec{u}$ và $\vec{v}$ vuông góc với nhau khi và chỉ khi $x_1x_2 + y_1y_2 = 0$.
- $\cos(\vec{u}, \vec{v}) = \dfrac{\vec{u}\,.\,\vec{v}}{|\vec{u}|\,.\,|\vec{v}|} = \dfrac{x_1x_2 + y_1y_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}\,.\,\sqrt{x_2^2 + y_2^2}}$.

Ví dụ 5 Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho tam giác ABC có $A(2\,;2)$, $B(1\,;-1)$, $C(8\,;0)$.

a) Tính $\overrightarrow{BA}\,.\,\overrightarrow{BC}$ và $\cos\widehat{ABC}$.

b) Chứng minh $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AC}$.

c) Giải tam giác ABC.

Giải

a) Ta có: $\overrightarrow{BA} = (1\,;3)$, $\overrightarrow{BC} = (7\,;1)$. Do đó $\overrightarrow{BA}\,.\,\overrightarrow{BC} = 1\,.\,7 + 3\,.\,1 = 10$.

Mặt khác, ta cũng có:

$$\left|\overrightarrow{BA}\right| = \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10}, \left|\overrightarrow{BC}\right| = \sqrt{7^2 + 1^2} = \sqrt{50},$$

$$\cos\widehat{ABC} = \cos(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}) = \frac{\overrightarrow{BA}\,.\,\overrightarrow{BC}}{\left|\overrightarrow{BA}\right|\,.\,\left|\overrightarrow{BC}\right|} = \frac{10}{\sqrt{10}\,.\,\sqrt{50}} = \frac{\sqrt{5}}{5}.$$

b) Do $\overrightarrow{AB} = (-1; -3)$ và $\overrightarrow{AC} = (6; -2)$ nên $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = (-1) \cdot 6 + (-3) \cdot (-2) = 0$.

Vậy $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AC}$.

c) Do $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AC}$ nên $\widehat{BAC} = 90^{\circ}$, tức là tam giác ABC vuông tại A.

Mà $\cos\widehat{ABC} = \dfrac{\sqrt{5}}{5}$ nên $\widehat{ABC} \approx 63^{\circ}$. Vì thế $\widehat{ACB} \approx 90^{\circ} - 63^{\circ} = 27^{\circ}$.

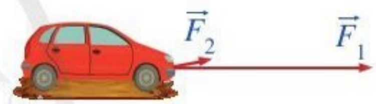
Mặt khác, ta có: $AB = \left|\overrightarrow{BA}\right| = \sqrt{10}$,

$$BC = \left|\overrightarrow{BC}\right| = \sqrt{50} = 5\sqrt{2},$$

$$CA = \sqrt{BC^2 - AB^2} = \sqrt{\left(5\sqrt{2}\right)^2 - \left(\sqrt{10}\right)^2} = 2\sqrt{10}.$$

Ví dụ 6 Một chiếc xe ô tô con bị mắc kẹt trong bùn lầy. Để kéo xe ra, người ta dùng xe tải kéo bằng cách gắn một đầu dây cáp kéo xe vào đầu xe ô tô con và móc đầu còn lại vào phía sau của xe tải kéo. Khi kéo, xe tải tạo ra một lực $\overrightarrow{F_1}$ có độ lớn (cường độ) là 2 000 N theo phương ngang lên xe ô tô con.

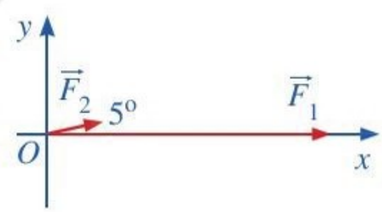
Ngoài ra, có thêm một người đẩy phía sau xe ô tô con, tạo ra lực $\overrightarrow{F_2}$ có độ lớn là 300 N lên xe. Các lực này được biểu diễn bằng vectơ như *Hình 21*, sao cho $(\overrightarrow{F_1}, \overrightarrow{F_2}) = 5^{\circ}$. Độ lớn lực tổng hợp tác động lên xe ô tô con là bao nhiêu Newton (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)?



Hình 21

Giải

Chọn hệ trục toạ độ *Oxy* như *Hình 22*, mỗi đơn vị trên trục ứng với 1 N.



Hình 22

Ta có:

- $\overrightarrow{F_1} = (2\,000\,;0)$;
- $(\overrightarrow{F_1}, \overrightarrow{F_2}) = 5^{\circ}$ nên toạ độ của $\overrightarrow{F_2}$ là:

$$\overrightarrow{F_2} = (300 \cdot \cos 5^{\circ}\,; 300 \cdot \sin 5^{\circ}).$$

Do đó, lực $\overrightarrow{F}$ tổng hợp các lực tác động lên xe ô tô con có toạ độ là:

$$\overrightarrow{F} = \overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2} = (2\,000 + 300 \cdot \cos 5^{\circ}\,; 300 \cdot \sin 5^{\circ}).$$

Độ lớn lực tổng hợp $\overrightarrow{F}$ tác động lên xe ô tô con là:

$$\left|\overrightarrow{F}\right| = \sqrt{(2\,000 + 300 \cdot \cos 5^{\circ})^2 + (300 \cdot \sin 5^{\circ})^2} \approx 2\,299 \text{ (N)}.$$

BÀI TẬP

1. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho $\vec{a} = (-1 ; 2)$, $\vec{b} = (3 ; 1)$, $\vec{c} = (2 ; -3)$.

a) Tìm toạ độ vectơ $\vec{u} = 2\vec{a} + \vec{b} - 3\vec{c}$.

b) Tìm toạ độ vectơ $\vec{x}$ sao cho $\vec{x} + 2\vec{b} = \vec{a} + \vec{c}$.

2. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho $A(-2 ; 3)$, $B(4 ; 5)$, $C(2 ; -3)$.

a) Chứng minh ba điểm A, B, C không thẳng hàng.

b) Tìm toạ độ trọng tâm G của tam giác ABC.

c) Giải tam giác ABC.

3. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho tam giác ABC có trung điểm các cạnh BC, CA, AB tương ứng là $M(2 ; 0)$, $N(4 ; 2)$, $P(1 ; 3)$.

a) Tìm toạ độ các điểm A, B, C.

b) Trọng tâm hai tam giác ABC và MNP có trùng nhau không? Vì sao?

4. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho tam giác ABC có $A(2 ; 4)$, $B(-1 ; 1)$, $C(-8; 2)$.

a) Tính $\widehat{ABC}$.

b) Tính chu vi của tam giác ABC.

c) Tìm toạ độ điểm M trên đường thẳng BC sao cho diện tích của tam giác ABC bằng hai lần diện tích của tam giác ABM.

5. Cho ba điểm $A(1 ; 1)$, $B(4 ; 3)$ và $C(6 ; -2)$.

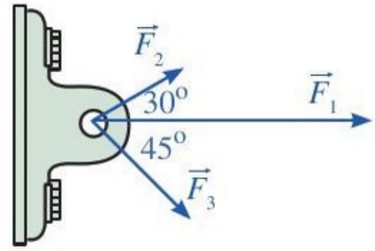
a) Chứng minh ba điểm A, B, C không thẳng hàng.

b) Tìm toạ độ điểm D sao cho tứ giác $ABCD$ là hình thang có $AB // CD$ và $CD = 2AB$.

6. Chứng minh khẳng định sau:

Hai vectơ $\vec{u} = (x_1 ; y_1)$, $\vec{v} = (x_2 ; y_2)$ $(\vec{v} \neq \vec{0})$ cùng phương khi và chỉ khi có một số thực k sao cho $x_1 = kx_2$ và $y_1 = ky_2$.

7. Một vật đồng thời bị ba lực tác động: lực tác động thứ nhất $\overrightarrow{F_1}$ có độ lớn là 1 500 N, lực tác động thứ hai $\overrightarrow{F_2}$ có độ lớn là 600 N, lực tác động thứ ba $\overrightarrow{F_3}$ có độ lớn là 800 N. Các lực này được biểu diễn bằng những vectơ như *Hình 23*, với $(\overrightarrow{F_1}, \overrightarrow{F_2}) = 30^o$, $(\overrightarrow{F_1}, \overrightarrow{F_3}) = 45^o$ và $(\overrightarrow{F_2}, \overrightarrow{F_3}) = 75^o$. Tính độ lớn lực tổng hợp tác động lên vật.



Hình 23

§3 PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG THẲNG

Một máy bay cất cánh từ sân bay theo một đường thẳng nghiêng với phương nằm ngang một góc 20^o, vận tốc cất cánh là 200 km/h. *Hình 24* minh hoạ hình ảnh đường bay của máy bay trên màn hình ra đa của bộ phận không lưu. Để xác định vị trí của máy bay tại những thời điểm quan trọng (chẳng hạn: 30 s, 60 s, 90 s, 120 s), người ta phải lập phương trình đường thẳng mô tả đường bay.

(*Nguồn: https://pixabay.com*)

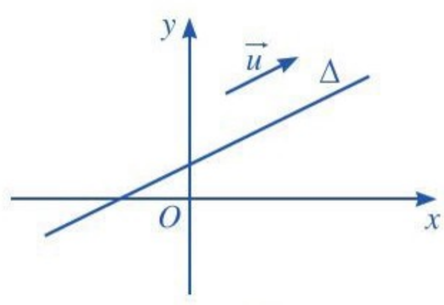
Hình 24

Làm thế nào để lập phương trình đường thẳng trong mặt phẳng toạ độ?

I. PHƯƠNG TRÌNH THAM SỐ CỦA ĐƯỜNG THẲNG

1. Vectơ chỉ phương của đường thẳng

1 Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho đường thẳng Δ. Vẽ vectơ $\vec{u}$ $(\vec{u} \neq \vec{0})$ có giá song song (hoặc trùng) với đường thẳng Δ (*Hình 25*).



Hình 25

Vectơ $\vec{u}$ được gọi là *vectơ chỉ phương* của đường thẳng Δ nếu $\vec{u} \neq \vec{0}$ và giá của $\vec{u}$ song song hoặc trùng với Δ.

Nhận xét

• Nếu $\vec{u}$ là một vectơ chỉ phương của Δ thì $k\vec{u}$ $(k \neq 0)$ cũng là một vectơ chỉ phương của Δ.

• Một đường thẳng hoàn toàn được xác định khi biết một điểm và một vectơ chỉ phương của đường thẳng đó.

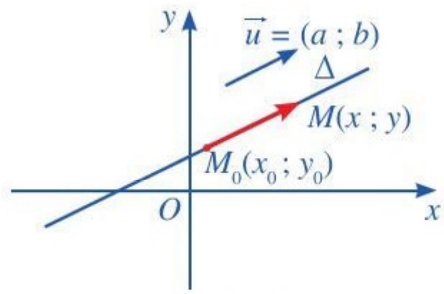
2. Phương trình tham số của đường thẳng

2 Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho đường thẳng Δ đi qua điểm $M_0(x_0 ; y_0)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (a ; b)$. Xét điểm $M(x ; y)$ nằm trên Δ (*Hình 26*).

a) Nhận xét về phương của hai vectơ $\vec{u}$ và $\overrightarrow{M_0M}$.

b) Chứng minh có số thực t sao cho $\overrightarrow{M_0M} = t\vec{u}$.

c) Biểu diễn toạ độ của điểm M qua toạ độ của điểm M_0 và toạ độ của vectơ chỉ phương $\vec{u}$.



Hình 26

Xét điểm $M(x ; y) \in \Delta$. Vì $\overrightarrow{M_0M}$ cùng phương với $\vec{u}$ nên có số thực t sao cho $\overrightarrow{M_0M} = t\vec{u}$.

Do $\overrightarrow{M_0M} = (x - x_0 ; y - y_0)$, $\vec{u} = (a ; b)$ nên

$$\overrightarrow{M_0M} = t\vec{u} \Leftrightarrow \begin{cases} x - x_0 = at \\ y - y_0 = bt \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \end{cases} \quad (I)$$

Ngược lại, nếu điểm $M(x ; y)$ trong mặt phẳng toạ độ thoả mãn hệ (I) thì $M(x ; y) \in \Delta$.

Hệ $\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \end{cases}$ ($a^2 + b^2 > 0$ và t là tham số) được gọi là *phương trình tham số* của đường thẳng Δ đi qua $M_0(x_0 ; y_0)$ và nhận $\vec{u} = (a ; b)$ làm vectơ chỉ phương.

Nhận xét: Cho đường thẳng Δ có phương trình tham số là:

$$\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \end{cases} \quad (a^2 + b^2 > 0 \text{ và } t \text{ là tham số}).$$

• Với mỗi giá trị cụ thể của t, ta xác định được một điểm trên đường thẳng Δ. Ngược lại, với mỗi điểm trên đường thẳng Δ, ta xác định được một giá trị cụ thể của t.

• Vectơ $\vec{u} = (a ; b)$ là một vectơ chỉ phương của Δ.

Ví dụ 1

a) Viết phương trình tham số của đường thẳng Δ đi qua điểm $A(-1 ; 3)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{u} = \left(2 ; \frac{1}{2}\right)$.

b) Cho đường thẳng Δ có phương trình tham số là $\begin{cases} x = -5 + 3t \\ y = 8 - 2t \end{cases}$. Chỉ ra toạ độ một vectơ chỉ phương của Δ và một điểm thuộc đường thẳng Δ.

Giải

a) Phương trình tham số của đường thẳng Δ là:

$$\begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 3 + \dfrac{1}{2}t \end{cases} \quad (t \text{ là tham số}).$$

b) Toạ độ của một vectơ chỉ phương của Δ là $\vec{u} = (3\,;-2)$.

Ứng với $t = 0$ ta có $\begin{cases} x = (-5) + 3\,.\,0 = -5 \\ y = 8 - 2\,.\,0 = 8. \end{cases}$

Điểm $B(-5\,;8)$ thuộc đường thẳng Δ.

1 Cho đường thẳng Δ có phương trình tham số

$$\begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = -2 + t. \end{cases}$$

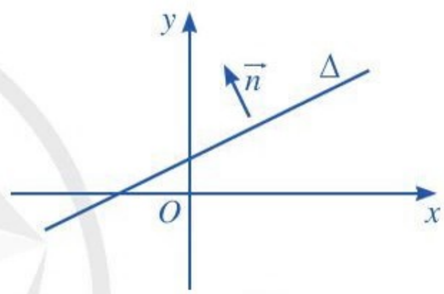
a) Chỉ ra toạ độ của hai điểm thuộc đường thẳng Δ.

b) Điểm nào trong các điểm $C(-1\,;-1)$, $D(1\,;3)$ thuộc đường thẳng Δ?

II. PHƯƠNG TRÌNH TỔNG QUÁT CỦA ĐƯỜNG THẲNG

1. Vectơ pháp tuyến của đường thẳng

3 Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho đường thẳng Δ. Vẽ vectơ $\vec{n}$ ($\vec{n} \neq \vec{0}$) có giá vuông góc với đường thẳng Δ (*Hình 27*).



Hình 27

Vectơ $\vec{n}$ được gọi là *vectơ pháp tuyến* của đường thẳng Δ nếu $\vec{n} \neq \vec{0}$ và giá của vectơ $\vec{n}$ vuông góc với Δ.

Nhận xét

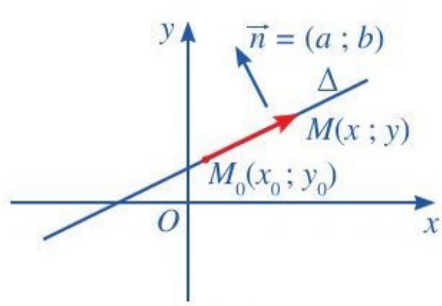
- Nếu $\vec{n}$ là một vectơ pháp tuyến của Δ thì $k\vec{n}$ ($k \neq 0$) cũng là một vectơ pháp tuyến của Δ.
- Một đường thẳng hoàn toàn được xác định khi biết một điểm và một vectơ pháp tuyến của đường thẳng đó.
- Nếu đường thẳng Δ có vectơ chỉ phương là $\vec{u} = (a\,;b)$ thì vectơ $\vec{n} = (-b\,;a)$ là một vectơ pháp tuyến của Δ.

2. Phương trình tổng quát của đường thẳng

4 Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho đường thẳng Δ đi qua điểm $M_0(x_0\,;y_0)$ và có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (a\,;b)$. Xét điểm $M(x\,;y)$ nằm trên Δ (*Hình 28*).

a) Nhận xét về phương của hai vectơ $\vec{n}$ và $\overrightarrow{M_0M}$.

b) Tìm mối liên hệ giữa toạ độ của điểm M với toạ độ của điểm M_0 và toạ độ của vectơ pháp tuyến $\vec{n}$.



Hình 28

Ta có: $\overrightarrow{M_0M} = (x - x_0 ; y - y_0)$, $\vec{n} = (a ; b)$.

Xét điểm $M(x ; y) \in \Delta$. Vì $\overrightarrow{M_0M} \perp \vec{n}$ nên

$$\overrightarrow{M_0M} . \vec{n} = 0 \Leftrightarrow a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0 \Leftrightarrow ax + by - ax_0 - by_0 = 0.$$

Đặt $c = - ax_0 - by_0$ ta được phương trình $ax + by + c = 0$ (II).

Ngược lại, nếu điểm $M(x ; y)$ trong mặt phẳng toạ độ thoả mãn phương trình (II) thì $M(x ; y) \in \Delta$.

Phương trình $ax + by + c = 0$ (a và b không đồng thời bằng 0) được gọi là *phương trình tổng quát* của đường thẳng.

Nhận xét

• Đường thẳng Δ đi qua điểm $M_0(x_0 ; y_0)$ và nhận $\vec{n} = (a ; b)$ làm vectơ pháp tuyến có phương trình là:

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0 \Leftrightarrow ax + by + (- ax_0 - by_0) = 0.$$

• Mỗi phương trình $ax + by + c = 0$ (a và b không đồng thời bằng 0) đều xác định một đường thẳng Δ trên mặt phẳng toạ độ nhận một vectơ pháp tuyến là $\vec{n} = (a ; b)$.

Ví dụ 2 Viết phương trình tổng quát của đường thẳng Δ đi qua điểm $A(- 2 ; 4)$ và có vectơ pháp tuyến là $\vec{n} = (3 ; 2)$.

Giải

Theo giả thiết, phương trình của đường thẳng Δ là

$$3(x + 2) + 2(y - 4) = 0.$$

Từ đó, ta nhận được phương trình tổng quát của đường thẳng Δ là $3x + 2y - 2 = 0$.

2 Cho đường thẳng Δ có phương trình tổng quát là $x - y + 1 = 0$.

a) Chỉ ra toạ độ của một vectơ pháp tuyến và một vectơ chỉ phương của Δ.

b) Chỉ ra toạ độ của hai điểm thuộc Δ.

3. Những dạng đặc biệt của phương trình tổng quát

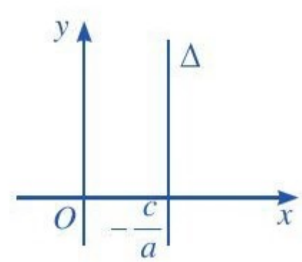
5 Cho đường thẳng Δ có phương trình tổng quát $ax + by + c = 0$ (a hoặc b khác 0).

Nêu nhận xét về vị trí tương đối của đường thẳng Δ với các trục toạ độ trong mỗi trường hợp sau:

a) $b = 0$ và $a \neq 0$; b) $b \neq 0$ và $a = 0$; c) $b \neq 0$ và $a \neq 0$.

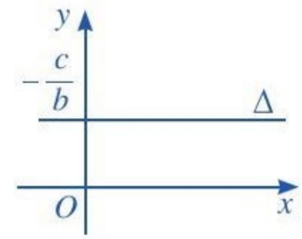
Để xét vị trí tương đối của đường thẳng Δ với các trục toạ độ, ta làm như sau:

a) Nếu $b = 0$ và $a \neq 0$ thì phương trình đường thẳng Δ trở thành $ax + c = 0$. Khi đó đường thẳng Δ song song hoặc trùng với trục Oy và cắt trục Ox tại điểm $\left(-\frac{c}{a} ; 0\right)$ (*Hình 29*).



Hình 29

b) Nếu $b \neq 0$ và $a = 0$ thì phương trình đường thẳng Δ trở thành $by + c = 0$. Khi đó đường thẳng Δ song song hoặc trùng với trục Ox và cắt trục Oy tại điểm $\left(0\,;-\dfrac{c}{b}\right)$ (*Hình 30*).



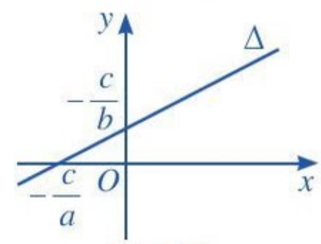
Hình 30

c) Nếu $b \neq 0$ và $a \neq 0$ thì phương trình đường thẳng Δ có thể viết thành

$$y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}.$$

Khi đó đường thẳng Δ là đồ thị hàm số bậc nhất

$y = -\dfrac{a}{b}x - \dfrac{c}{b}$ với hệ số góc là $k = -\dfrac{a}{b}$ (*Hình 31*).



Hình 31

Nhận xét

• Đường thẳng Δ có phương trình tổng quát $ax + by + c = 0$ (a hoặc b khác 0) là đồ thị hàm số bậc nhất khi và chỉ khi $a \neq 0$ và $b \neq 0$.

• Phương trình trục hoành là $y = 0$, phương trình trục tung là $x = 0$.

III. LẬP PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG THẲNG

Khi lập phương trình đường thẳng, ta thường gặp ba trường hợp như sau:

– Lập phương trình đường thẳng đi qua một điểm cho trước và biết vectơ pháp tuyến.

– Lập phương trình đường thẳng đi qua một điểm cho trước và biết vectơ chỉ phương.

– Lập phương trình đường thẳng đi qua hai điểm cho trước.

1. Lập phương trình đường thẳng đi qua một điểm và biết vectơ pháp tuyến

Phương trình đường thẳng Δ đi qua điểm $M_0(x_0\,;y_0)$ và nhận $\vec{n} = (a\,;b)$ $(\vec{n} \neq \vec{0})$ làm vectơ pháp tuyến là $a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0$.

2. Lập phương trình đường thẳng đi qua một điểm và biết vectơ chỉ phương

Phương trình tham số của đường thẳng Δ đi qua điểm $M_0(x_0\,;y_0)$ và nhận $\vec{u} = (a\,;b)$ $(\vec{u} \neq \vec{0})$ làm vectơ chỉ phương là $\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \end{cases}$ (t là tham số).

Nếu $a \neq 0$ và $b \neq 0$ thì ta còn có thể viết phương trình của đường thẳng Δ ở dạng:

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b}.$$

3. Lập phương trình đường thẳng đi qua hai điểm

Đường thẳng Δ đi qua hai điểm $A(x_0 ; y_0), B(x_1 ; y_1)$ nên nhận vectơ $\overrightarrow{AB} = (x_1 - x_0 ; y_1 - y_0)$ làm vectơ chỉ phương. Do đó, phương trình tham số của đường thẳng Δ là:

$$\begin{cases} x = x_0 + (x_1 - x_0)t \\ y = y_0 + (y_1 - y_0)t \end{cases} \text{ (t là tham số).}$$

Nếu $x_1 - x_0 \neq 0$ và $y_1 - y_0 \neq 0$ thì ta còn có thể viết phương trình của đường thẳng Δ ở dạng:

$$\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0}.$$

Ví dụ 3 Lập phương trình đường thẳng Δ thoả mãn mỗi điều kiện sau:

a) Đường thẳng Δ đi qua điểm $M(-2 ; -3)$ và có $\vec{n} = (2 ; 5)$ là vectơ pháp tuyến;

b) Đường thẳng Δ đi qua điểm $M(3 ; -5)$ và có $\vec{u} = (2 ; -4)$ là vectơ chỉ phương;

c) Đường thẳng Δ đi qua hai điểm $A(-3 ; 4)$ và $B(1 ; -1)$.

Giải

a) Phương trình Δ là $2(x + 2) + 5(y + 3) = 0 \Leftrightarrow 2x + 5y + 19 = 0$.

b) Phương trình Δ là $\dfrac{x-3}{2} = \dfrac{y+5}{-4} \Leftrightarrow 4x + 2y - 2 = 0 \Leftrightarrow 2x + y - 1 = 0$.

c) Phương trình Δ là $\dfrac{x+3}{1-(-3)} = \dfrac{y-4}{-1-4} \Leftrightarrow \dfrac{x+3}{4} = \dfrac{y-4}{-5} \Leftrightarrow 5x + 4y - 1 = 0$.

Ví dụ 4 Lập phương trình đường thẳng Δ đi qua hai điểm $A(a ; 0)$ và $B(0 ; b)$ với $a^2 + b^2 > 0$.

Giải

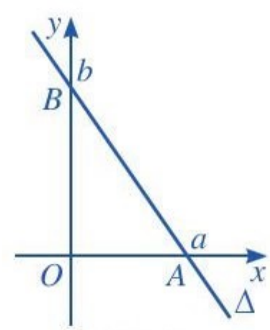
Đường thẳng Δ đi qua hai điểm A, B nên có vectơ chỉ phương là $\overrightarrow{AB} = (-a ; b)$. Suy ra Δ nhận vectơ $\vec{n} = (b ; a)$ làm vectơ pháp tuyến. Vậy đường thẳng Δ có phương trình tổng quát là:

$$b(x - a) + a(y - 0) = 0 \text{ hay } bx + ay - ab = 0 \qquad (1)$$

Chú ý: Trong trường hợp $ab \neq 0$, chia hai vế của phương trình (1) cho ab ta được:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \qquad (2)$$

Phương trình dạng (2) được gọi là *phương trình đường thẳng theo đoạn chắn*, đường thẳng này cắt Ox và Oy lần lượt tại $A(a ; 0)$ và $B(0 ; b)$ (*Hình 32*).



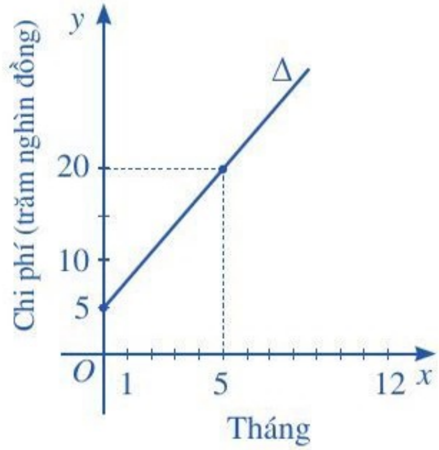
Hình 32

Ví dụ 5 Đường thẳng Δ ở *Hình 33* biểu thị tổng chi phí lắp đặt và tiền cước sử dụng dịch vụ Internet (đơn vị: trăm nghìn đồng) theo thời gian của một gia đình (đơn vị: tháng).

a) Viết phương trình của đường thẳng Δ.

b) Giao điểm của đường thẳng Δ với trục tung trong tình huống này có ý nghĩa gì?

c) Tính tổng chi phí lắp đặt và sử dụng Internet trong 12 tháng đầu tiên.



Hình 33

Giải

a) Đường thẳng Δ đi qua hai điểm lần lượt có toạ độ $(0 ; 5)$ và $(5 ; 20)$ nên Δ có phương trình là:

$$\frac{x-0}{5-0}=\frac{y-5}{20-5} \Leftrightarrow \frac{x}{5}=\frac{y-5}{15} \Leftrightarrow \frac{x}{1}=\frac{y-5}{3} \Leftrightarrow 3x-y+5=0 \Leftrightarrow y=3x+5.$$

b) Giao điểm của đường thẳng Δ với trục Oy ứng với $x = 0$. Thời điểm $x = 0$ cho biết mức phí ban đầu lắp đặt để sử dụng Internet. Khi $x = 0$ thì $y = 5$, vì vậy chi phí lắp đặt ban đầu là 500 000 đồng.

c) 12 tháng đầu tiên ứng với $x = 12$. Do đó: $y = 3 . 12 + 5 = 41$.

Vậy tổng chi phí lắp đặt và sử dụng Internet trong 12 tháng đầu tiên là 4 100 000 đồng.

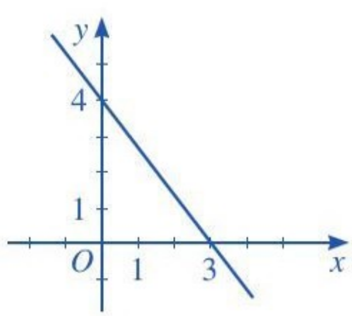
BÀI TẬP

1. Lập phương trình tổng quát của đường thẳng Δ đi qua điểm $A(-1 ; 2)$ và

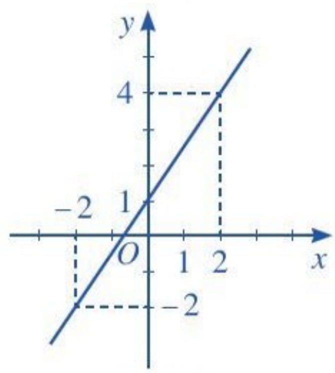
a) Có vectơ pháp tuyến là $\vec{n}=(3 ; 2)$.

b) Có vectơ chỉ phương là $\vec{u}=(-2 ; 3)$.

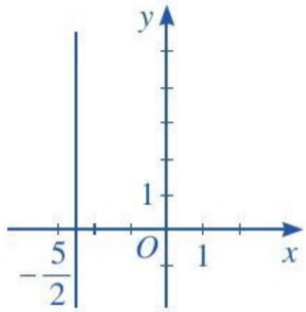
2. Lập phương trình mỗi đường thẳng trong các *Hình 34, 35, 36, 37* dưới đây:



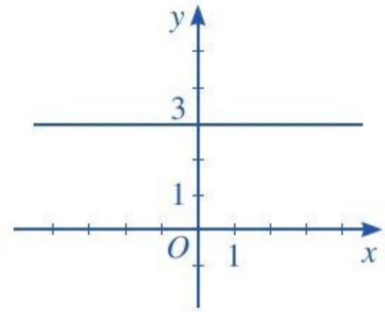
Hình 34



Hình 35



Hình 36



Hình 37

3. Cho đường thẳng d có phương trình tham số là: $\begin{cases} x = -1 - 3t \\ y = 2 + 2t. \end{cases}$

a) Lập phương trình tổng quát của đường thẳng d.

b) Tìm toạ độ giao điểm của đường thẳng d lần lượt với các trục Ox, Oy.

c) Đường thẳng d có đi qua điểm $M(-7 ; 5)$ hay không?

4. Cho đường thẳng d có phương trình tổng quát là: $x - 2y - 5 = 0$.

a) Lập phương trình tham số của đường thẳng d.

b) Tìm toạ độ điểm M thuộc d sao cho $OM = 5$ với O là gốc toạ độ.

c) Tìm toạ độ điểm N thuộc d sao cho khoảng cách từ N đến trục hoành Ox là 3.

5. Cho tam giác ABC, biết $A(1 ; 3)$, $B(-1 ; -1)$, $C(5 ; -3)$. Lập phương trình tổng quát của:

a) Ba đường thẳng AB, BC, AC;

b) Đường trung trực cạnh AB;

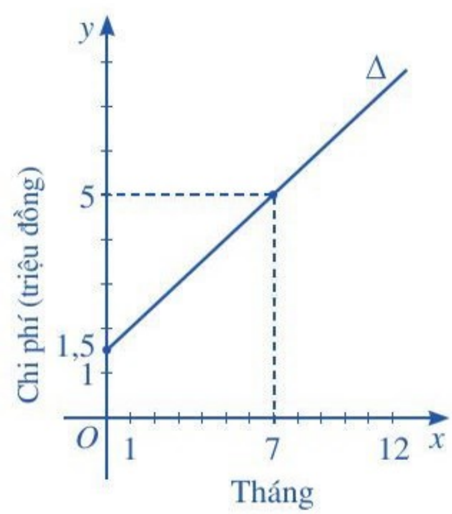
c) Đường cao AH và đường trung tuyến AM.

6. Để tham gia một phòng tập thể dục, người tập phải trả một khoản phí tham gia ban đầu và phí sử dụng phòng tập. Đường thẳng Δ ở *Hình 38* biểu thị tổng chi phí (đơn vị: triệu đồng) tham gia một phòng tập thể dục theo thời gian tập của một người (đơn vị: tháng).

a) Viết phương trình của đường thẳng Δ.

b) Giao điểm của đường thẳng Δ với trục tung trong tình huống này có ý nghĩa gì?

c) Tính tổng chi phí mà người đó phải trả khi tham gia phòng tập thể dục với thời gian 12 tháng.



Hình 38

§4 VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI VÀ GÓC GIỮA HAI ĐƯỜNG THẲNG. KHOẢNG CÁCH TỪ MỘT ĐIỂM ĐẾN MỘT ĐƯỜNG THẲNG

Trong thực tiễn, có những tình huống đòi hỏi chúng ta phải xác định vị trí tương đối của hai đường thẳng, giao điểm của hai đường thẳng, ... Chẳng hạn: Ở môn thể thao nội dung 10 m súng trường hơi di động, mục tiêu di động trên một đường thẳng *b* song song với mặt đất và cách mặt đất 1,4 m; viên đạn di động trên một đường thẳng *a* (*Hình 39*). Để trúng mục tiêu, vận động viên phải ước lượng được giao điểm *M* của *a* và *b* sao cho thời gian chuyển động đến điểm *M* của viên đạn và của mục tiêu là bằng nhau.

Hình 39

Làm thế nào để xác định giao điểm M của hai đường thẳng a và b?

I. VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI CỦA HAI ĐƯỜNG THẲNG

1 Nêu vị trí tương đối của hai đường thẳng trong mặt phẳng.

Hai đường thẳng trong mặt phẳng thì cắt nhau hoặc song song hoặc trùng nhau.

2 Trong mặt phẳng toạ độ, cho hai đường thẳng Δ_1, Δ_2 lần lượt có vectơ chỉ phương là $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$. Nêu điều kiện về hai vectơ $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$ trong mỗi trường hợp sau:

a) Δ_1 cắt Δ_2; b) Δ_1 song song với Δ_2; c) Δ_1 trùng với Δ_2.

Trong mặt phẳng toạ độ, cho hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2 lần lượt có vectơ chỉ phương là $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$. Khi đó

a) Δ_1 cắt Δ_2 khi và chỉ khi $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$ không cùng phương.

b) Δ_1 song song với Δ_2 khi và chỉ khi $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$ cùng phương và có một điểm thuộc một đường thẳng mà không thuộc đường thẳng còn lại.

c) Δ_1 trùng với Δ_2 khi và chỉ khi $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$ cùng phương và có một điểm thuộc cả hai đường thẳng đó.

Chú ý

• Δ_1 vuông góc với Δ_2 khi và chỉ khi $\vec{u}_1, \vec{u}_2$ vuông góc với nhau.

• Khi xét vị trí tương đối của hai đường thẳng, có thể dựa vào cặp vectơ pháp tuyến của hai đường thẳng đó.

Ví dụ 1 Xét vị trí tương đối của mỗi cặp đường thẳng sau:

a) $\Delta_1: 2x - y + 1 = 0$ và $\Delta_2: -x + 2y + 2 = 0$.

b) $\Delta_3: x - y - 1 = 0$ và $\Delta_4: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 3 + 2t. \end{cases}$

Giải

a) Đường thẳng Δ_1 có vectơ chỉ phương $\vec{u}_1 = (1 ; 2)$, đường thẳng Δ_2 có vectơ chỉ phương $\vec{u}_2 = (-2 ; -1)$. Do $\frac{1}{-2} \neq \frac{2}{-1}$ nên $\vec{u}_1, \vec{u}_2$ không cùng phương, suy ra Δ_1 cắt Δ_2.

b) Đường thẳng Δ_3, Δ_4 lần lượt có vectơ chỉ phương $\vec{u}_3 = (1 ; 1)$, $\vec{u}_4 = (2 ; 2)$. Suy ra $\vec{u}_4 = 2\vec{u}_3$. Chọn $t = 0$, ta có điểm $M(1 ; 3) \in \Delta_4$. Do $1 - 3 - 1 \neq 0$ nên $M(1 ; 3) \notin \Delta_3$. Vậy Δ_3 song song với Δ_4.

1 Xét vị trí tương đối của hai đường thẳng

$$\Delta_1 : \begin{cases} x = 1 + t_1 \\ y = -2 + t_1 \end{cases} \text{ và}$$

$$\Delta_2 : \begin{cases} x = 2t_2 \\ y = -3 + 2t_2. \end{cases}$$

Ta có thể xét vị trí tương đối của hai đường thẳng dựa vào số giao điểm của chúng.

Nhận xét: Cho hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2 có phương trình lần lượt là

$$a_1x + b_1y + c_1 = 0 \text{ và } a_2x + b_2y + c_2 = 0.$$

Xét hệ phương trình: $$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0 \end{cases} \quad \text{(I)}$$

Khi đó

a) Δ_1 cắt Δ_2 khi và chỉ khi hệ (I) có nghiệm duy nhất.

b) Δ_1 song song với Δ_2 khi và chỉ khi hệ (I) vô nghiệm.

c) Δ_1 trùng với Δ_2 khi và chỉ khi hệ (I) có vô số nghiệm.

Ví dụ 2 Xét vị trí tương đối của hai đường thẳng

$$\Delta_1: x - 2y + 1 = 0 \text{ và } \Delta_2: 2x - 4y + 2 = 0.$$

Giải

Toạ độ giao điểm của đường thẳng Δ_1 và đường thẳng Δ_2 là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} x - 2y + 1 = 0 \\ 2x - 4y + 2 = 0. \end{cases}$$

Hệ trên có vô số nghiệm.

Như vậy, Δ_1 và Δ_2 có vô số điểm chung, tức là Δ_1 trùng với Δ_2.

2 Xét vị trí tương đối của đường thẳng

$d: x + 2y - 2 = 0$

với mỗi đường thẳng sau:

$\Delta_1: 3x - 2y + 6 = 0$;

$\Delta_2: x + 2y + 2 = 0$;

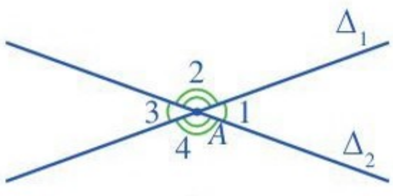
$\Delta_3: 2x + 4y - 4 = 0$.

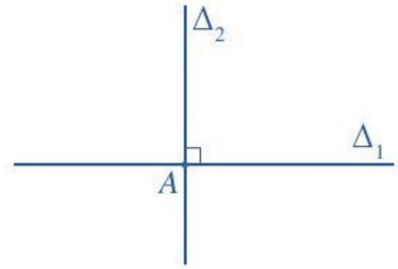
II. GÓC GIỮA HAI ĐƯỜNG THẲNG

3 Trong mặt phẳng, cho hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2 cắt nhau tại A tạo thành bốn góc đỉnh A.

Quan sát *Hình 40a* và đọc tên một góc nhọn trong bốn góc đó.

Quan sát *Hình 40b* và nêu đặc điểm bốn góc tại đỉnh A.





Hình 40

Hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2 cắt nhau tạo thành bốn góc.

- Nếu hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2 không vuông góc với nhau thì góc nhọn trong bốn góc tạo thành được gọi là góc giữa hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2.
- Nếu hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2 vuông góc với nhau thì ta nói góc giữa hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2 bằng 90^o.

Góc giữa hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2 được kí hiệu là $(\widehat{\Delta_1, \Delta_2})$ hoặc (Δ_1, Δ_2).

Quy ước: Khi Δ_1 song song hoặc trùng với Δ_2, ta nói góc giữa hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2 bằng 0^o.

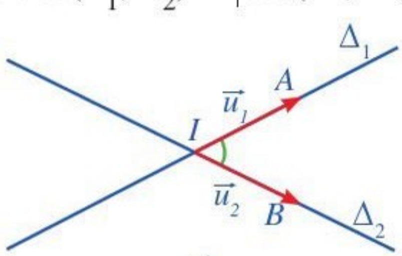
Nhận xét: Góc giữa hai đường thẳng luôn bé hơn hoặc bằng 90^o, tức là $(\Delta_1, \Delta_2) \leq 90^o$.

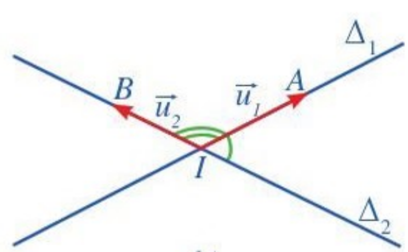
4 Cho hai đường thẳng Δ_1, Δ_2 cắt nhau tại I và có vectơ chỉ phương lần lượt là $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$. Gọi A và B là các điểm lần lượt thuộc hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2 sao cho

$$\vec{u}_1 = \overrightarrow{IA},\ \vec{u}_2 = \overrightarrow{IB}.$$

a) Quan sát *Hình 41a, Hình 41b,* hãy nhận xét về độ lớn của góc giữa hai đường thẳng Δ_1, Δ_2 và độ lớn của góc giữa hai vectơ $\overrightarrow{IA}$, $\overrightarrow{IB}$.

b) Chứng tỏ $\cos(\Delta_1, \Delta_2) = \left|\cos(\overrightarrow{IA}, \overrightarrow{IB})\right|$.





Hình 41

Để trả lời các câu hỏi trên, ta làm như sau:

• Nếu $(\overrightarrow{IA}, \overrightarrow{IB}) \leq 90°$ thì $(\Delta_1, \Delta_2) = (\overrightarrow{IA}, \overrightarrow{IB})$. Do đó, $\cos(\Delta_1, \Delta_2) = \cos(\overrightarrow{IA}, \overrightarrow{IB})$ và $\cos(\overrightarrow{IA}, \overrightarrow{IB}) \geq 0$.

• Nếu $(\overrightarrow{IA}, \overrightarrow{IB}) > 90°$ thì $(\Delta_1, \Delta_2) = 180° - (\overrightarrow{IA}, \overrightarrow{IB})$. Do đó, $\cos(\Delta_1, \Delta_2) = -\cos(\overrightarrow{IA}, \overrightarrow{IB})$ và $\cos(\overrightarrow{IA}, \overrightarrow{IB}) < 0$.

Từ hai trường hợp trên, ta suy ra $\cos(\Delta_1, \Delta_2) = \left|\cos(\overrightarrow{IA}, \overrightarrow{IB})\right|$.

Nhận xét: Do $(\vec{u}_1, \vec{u}_2) = (\overrightarrow{IA}, \overrightarrow{IB})$ nên $\cos(\Delta_1, \Delta_2) = \left|\cos(\vec{u}_1, \vec{u}_2)\right| = \dfrac{\left|\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2\right|}{\left|\vec{u}_1\right| \cdot \left|\vec{u}_2\right|}$.

5 Trong mặt phẳng toạ độ, cho hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2 có vectơ chỉ phương lần lượt là $\vec{u}_1 = (a_1 ; b_1)$, $\vec{u}_2 = (a_2 ; b_2)$. Tính $\cos(\Delta_1, \Delta_2)$.

Trong mặt phẳng toạ độ, cho hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2 có vectơ chỉ phương lần lượt là $\vec{u}_1 = (a_1 ; b_1)$, $\vec{u}_2 = (a_2 ; b_2)$. Ta có:

$$\cos(\Delta_1, \Delta_2) = \frac{\left|a_1a_2 + b_1b_2\right|}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2} \cdot \sqrt{a_2^2 + b_2^2}}.$$

Nhận xét

• $\Delta_1 \perp \Delta_2 \Leftrightarrow a_1a_2 + b_1b_2 = 0$.

• Cho hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2 có vectơ pháp tuyến lần lượt là $\vec{n}_1$, $\vec{n}_2$. Ta cũng có:

$$\cos(\Delta_1, \Delta_2) = \left|\cos(\vec{n}_1, \vec{n}_2)\right| = \frac{\left|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2\right|}{\left|\vec{n}_1\right| \cdot \left|\vec{n}_2\right|}.$$

Ví dụ 3 Tính số đo góc giữa hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2 trong mỗi trường hợp sau:

a) $\Delta_1: \begin{cases} x = -1 + \sqrt{3}t_1 \\ y = 1 + t_1 \end{cases}$ và $\Delta_2: \begin{cases} x = -1 + \sqrt{3}t_2 \\ y = 4 - t_2; \end{cases}$

b) $\Delta_1: 3x + y - 10 = 0$ và $\Delta_2: -2x + y - 7 = 0$.

Giải

a) Δ_1 có vectơ chỉ phương $\vec{u}_1 = (\sqrt{3} ; 1)$.

Δ_2 có vectơ chỉ phương $\vec{u}_2 = (\sqrt{3} ; -1)$.

3 Tính số đo góc giữa hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2 trong mỗi trường hợp sau:

a) $\Delta_1: \begin{cases} x = -3 + 3\sqrt{3}t \\ y = 2 + 3t \end{cases}$ và $\Delta_2: y - 4 = 0$;

b) $\Delta_1: 2x - y = 0$ và $\Delta_2: -x + 3y - 5 = 0$.

Do đó, ta có: $\cos(\Delta_1, \Delta_2) = \dfrac{|\sqrt{3}.\sqrt{3} + 1.(-1)|}{\sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2}.\sqrt{(\sqrt{3})^2 + (-1)^2}} = \dfrac{1}{2}$.

Vậy $(\Delta_1, \Delta_2) = 60^{\circ}$.

b) Δ_1 có vectơ pháp tuyến $\vec{n}_1 = (3 ; 1)$, Δ_2 có vectơ pháp tuyến $\vec{n}_2 = (-2 ; 1)$. Do đó, ta có:

$$\cos(\Delta_1, \Delta_2) = |\cos(\vec{n}_1, \vec{n}_2)| = \frac{|\vec{n}_1 . \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| . |\vec{n}_2|} = \frac{|3.(-2) + 1.1|}{\sqrt{3^2 + 1^2}.\sqrt{(-2)^2 + 1^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Vậy $(\Delta_1, \Delta_2) = 45^{\circ}$.

III. KHOẢNG CÁCH TỪ MỘT ĐIỂM ĐẾN MỘT ĐƯỜNG THẲNG

6 Trong mặt phẳng toạ độ, cho đường thẳng Δ: $2x + y - 4 = 0$ và điểm $M(-1 ; 1)$. Gọi H là hình chiếu của M lên đường thẳng Δ.

a) Tìm vectơ chỉ phương của đường thẳng MH.

b) Viết phương trình tham số của đường thẳng MH.

c) Tìm toạ độ của H. Từ đó, tính độ dài đoạn thẳng MH.

Trong trường hợp tổng quát, ta có:

Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho đường thẳng Δ có phương trình $ax + by + c = 0$ $(a^2 + b^2 > 0)$ và điểm $M(x_0 ; y_0)$. Khoảng cách từ điểm M đến đường thẳng Δ, kí hiệu là $d(M, \Delta)$, được tính bởi công thức sau:

$$d(M, \Delta) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Chú ý: Nếu $M \in \Delta$ thì $d(M, \Delta) = 0$.

Ví dụ 4 Tính khoảng cách từ điểm M đến đường thẳng Δ trong mỗi trường hợp sau:

a) $M(-2 ; 1)$ và Δ: $2x - 3y + 5 = 0$.

b) $M(1 ; -3)$ và Δ: $\begin{cases} x = -2 + 3t \\ y = 2 - 4t. \end{cases}$

Giải

a) Ta có:

$$d(M, \Delta) = \frac{|2.(-2) - 3.1 + 5|}{\sqrt{2^2 + (-3)^2}} = \frac{2}{\sqrt{13}} = \frac{2\sqrt{13}}{13}.$$

4

a) Tính khoảng cách từ điểm $O(0 ; 0)$ đến đường thẳng Δ:

$$\frac{x}{-4} + \frac{y}{2} = 1.$$

b) Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng song song

Δ_1: $x - y + 1 = 0$

và Δ_2: $x - y - 1 = 0$.

b) Đường thẳng Δ đi qua điểm $N(-2 ; 2)$, có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (4 ; 3)$.

Phương trình của đường thẳng Δ là $4(x+2)+3(y-2)=0$. Từ đó, ta nhận được phương trình tổng quát của đường thẳng Δ là $4x+3y+2=0$.

Vậy $d(M, \Delta) = \dfrac{|4 . 1 + 3 . (-3) + 2|}{\sqrt{4^2+3^2}} = \dfrac{3}{5}$.

BÀI TẬP

1. Xét vị trí tương đối của mỗi cặp đường thẳng sau:

a) d_1: $3x+2y-5=0$ và d_2: $x-4y+1=0$;

b) d_3: $x-2y+3=0$ và d_4: $-2x+4y+10=0$;

c) d_5: $4x+2y-3=0$ và d_6: $\begin{cases} x = -\dfrac{1}{2} + t \\ y = \dfrac{5}{2} - 2t. \end{cases}$

2. Tính số đo góc giữa hai đường thẳng d_1: $2x-y+5=0$ và d_2: $x-3y+3=0$.

3. Tính khoảng cách từ một điểm đến một đường thẳng trong mỗi trường hợp sau:

a) $A(1 ; -2)$ và Δ_1: $3x-y+4=0$; b) $B(-3 ; 2)$ và Δ_2: $\begin{cases} x = -2 + t \\ y = 1 - 2t. \end{cases}$

4. Với giá trị nào của tham số m thì hai đường thẳng sau đây vuông góc?

$$\Delta_1: mx - y + 1 = 0 \text{ và } \Delta_2: 2x - y + 3 = 0.$$

5. Cho ba điểm $A(2 ; -1)$, $B(1 ; 2)$ và $C(4 ; -2)$. Tính số đo góc BAC và góc giữa hai đường thẳng AB, AC.

6. Cho ba điểm $A(2 ; 4)$, $B(-1 ; 2)$ và $C(3 ; -1)$. Viết phương trình đường thẳng đi qua B đồng thời cách đều A và C.

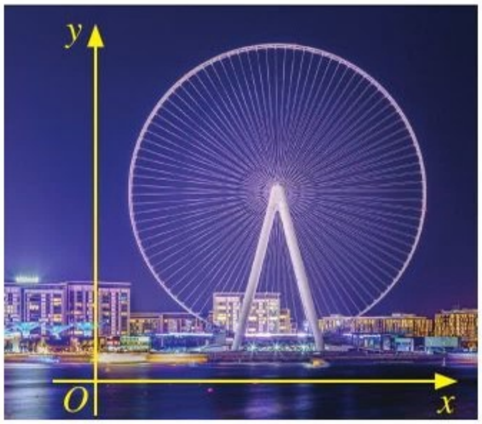
7. Có hai con tàu A và B cùng xuất phát từ hai bến, chuyển động đều theo đường thẳng ngoài biển. Trên màn hình ra đa của trạm điều khiển (được coi như mặt phẳng toạ độ Oxy với đơn vị trên các trục tính theo ki-lô-mét), sau khi xuất phát t (giờ) $(t \geq 0)$, vị trí của tàu A có toạ độ được xác định bởi công thức $\begin{cases} x = 3 - 33t \\ y = -4 + 25t \end{cases}$, vị trí của tàu B có toạ độ là $(4 - 30t ; 3 - 40t)$.

a) Tính côsin góc giữa hai đường đi của hai tàu A và B.

b) Sau bao lâu kể từ thời điểm xuất phát hai tàu gần nhau nhất?

c) Nếu tàu A đứng yên ở vị trí ban đầu, tàu B chạy thì khoảng cách ngắn nhất giữa hai tàu bằng bao nhiêu?

§5 PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG TRÒN



Hình 42
(*Nguồn: https://pixabay.com*)

Ở một số công viên, người ta dựng vòng quay có bán kính rất lớn đặt theo phương thẳng đứng như *Hình 42*. Khi vòng quay hoạt động, một người ngồi trong cabin sẽ chuyển động theo đường tròn.

Làm thế nào để xác định được phương trình quỹ đạo chuyển động của người đó?

I. PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG TRÒN

1. Phương trình đường tròn

1

a) Tính khoảng cách từ gốc toạ độ $O(0 ; 0)$ đến điểm $M(3 ; 4)$ trong mặt phẳng toạ độ Oxy.

b) Cho hai điểm $I(a ; b)$ và $M(x ; y)$ trong mặt phẳng toạ độ Oxy. Nêu công thức tính độ dài đoạn thẳng IM.

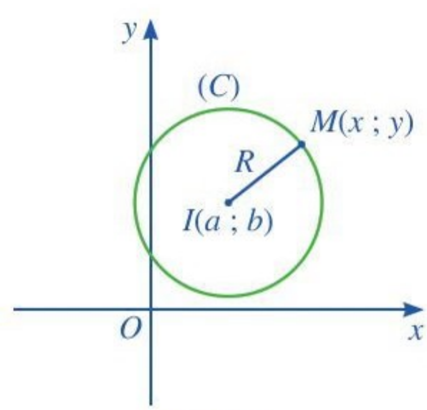
Nhận xét: Với hai điểm $I(a ; b)$ và $M(x ; y)$ trong mặt phẳng toạ độ Oxy, ta có:

$$IM = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}.$$

2 Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, nêu mối liên hệ giữa x và y để:

a) Điểm $M(x ; y)$ nằm trên đường tròn tâm $O(0 ; 0)$ bán kính 5.

b) Điểm $M(x ; y)$ nằm trên đường tròn (C) tâm $I(a ; b)$ bán kính R.



Hình 43

Điểm $M(x ; y)$ nằm trên đường tròn (C) khi và chỉ khi

$$IM = R \Leftrightarrow IM^2 = R^2$$

$$\Leftrightarrow (x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2 \text{ (Hình 43).}$$

Phương trình đường tròn tâm $I(a ; b)$ bán kính R là

$$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2.$$

Phương trình đường tròn ở dạng trên thường được gọi là *phương trình chính tắc của đường tròn.*

Ví dụ 1 Lập phương trình đường tròn trong mỗi trường hợp sau:

a) Đường tròn tâm O bán kính R;

b) Đường tròn tâm $I(-1 ; 3)$ bán kính 7.

Giải

a) Phương trình đường tròn tâm O bán kính R là:

$$(x-0)^2+(y-0)^2=R^2 \Leftrightarrow x^2+y^2=R^2.$$

b) Phương trình đường tròn tâm $I(-1 ; 3)$ bán kính 7 là:

$$[x-(-1)]^2+(y-3)^2=7^2 \Leftrightarrow (x+1)^2+(y-3)^2=49.$$

Ví dụ 2 Tìm tâm và bán kính của đường tròn có phương trình là:

$$(x+2)^2+(y-5)^2=9.$$

Giải

Ta có: $(x+2)^2+(y-5)^2=9$

$\Leftrightarrow [x-(-2)]^2+(y-5)^2=3^2.$

Vậy đường tròn đã cho có tâm là $I(-2 ; 5)$ bán kính $R=3$.

1 Viết phương trình đường tròn tâm $I(6 ; -4)$ đi qua điểm $A(8 ; -7)$.

3 Viết phương trình đường tròn (C):

$$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2 \text{ về dạng } x^2+y^2-2ax-2by+c=0.$$

Nhận xét: Ta có thể viết phương trình $(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$ của đường tròn tâm $I(a ; b)$ bán kính R về phương trình có dạng là $x^2+y^2-2ax-2by+c=0$. Dạng đó thường được gọi là *phương trình tổng quát của đường tròn.*

Ví dụ 3

a) Phương trình $x^2+y^2-4x+2y-4=0$ có phải là phương trình đường tròn không? Nếu phải, xác định toạ độ tâm và bán kính của đường tròn đó.

b) Xác định điều kiện của a, b, c để phương trình $x^2+y^2-2ax-2by+c=0$ là phương trình đường tròn. Khi đó, xác định toạ độ tâm và bán kính theo a, b, c.

Giải

a) Ta có:

$$x^2 + y^2 - 4x + 2y - 4 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 + y^2 + 2y + 1 = 9 \Leftrightarrow (x-2)^2 + (y+1)^2 = 3^2.$$

Phương trình trên là phương trình đường tròn tâm $I(2\,;-1)$ bán kính $R = 3$.

b) Ta có:

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0 \Leftrightarrow (x^2 - 2ax + a^2) + (y^2 - 2by + b^2) = a^2 + b^2 - c$$
$$\Leftrightarrow (x-a)^2 + (y-b)^2 = a^2 + b^2 - c.$$

Do đó, phương trình trên là phương trình đường tròn khi và chỉ khi $a^2 + b^2 > c$. Lúc này đường tròn đã cho có tâm $I(a\,;b)$ bán kính

$$R = \sqrt{a^2 + b^2 - c}.$$

2 Tìm k sao cho phương trình:
$x^2 + y^2 + 2kx + 4y + 6k + 3 = 0$
là phương trình đường tròn.

2. Phương trình đường tròn đi qua ba điểm không thẳng hàng

Do có duy nhất một đường tròn đi qua ba điểm không thẳng hàng cho trước nên ta có thể lập được phương trình đường tròn đó khi biết toạ độ của ba điểm nói trên.

Ví dụ 4 Lập phương trình đường tròn đi qua ba điểm

$$A(-1\,;1),\ B(0\,;-2),\ C(0\,;2).$$

Giải

Giả sử tâm của đường tròn là điểm $I(a\,;b)$. Ta có $IA = IB = IC \Leftrightarrow IA^2 = IB^2 = IC^2$.

Vì $IA^2 = IB^2$, $IB^2 = IC^2$ nên

$$\begin{cases}(-1-a)^2 + (1-b)^2 = (0-a)^2 + (-2-b)^2\\(0-a)^2 + (-2-b)^2 = (0-a)^2 + (2-b)^2\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}a^2 + b^2 + 2a - 2b + 2 = a^2 + b^2 + 4b + 4\\a^2 + b^2 + 4b + 4 = a^2 + b^2 - 4b + 4\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}2a - 2b = 4b + 2\\b = 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a = 1\\b = 0.\end{cases}$$

3 Lập phương trình đường tròn đi qua ba điểm $A(1\,;2)$, $B(5\,;2)$, $C(1\,;-3)$.

Đường tròn tâm $I(1\,;0)$ bán kính $R = IC = \sqrt{a^2 + b^2 - 4b + 4} = \sqrt{5}$.

Phương trình đường tròn là $(x-1)^2 + (y-0)^2 = (\sqrt{5})^2$.

Vậy phương trình đường tròn là $(x-1)^2 + y^2 = 5$.

II. PHƯƠNG TRÌNH TIẾP TUYẾN CỦA ĐƯỜNG TRÒN

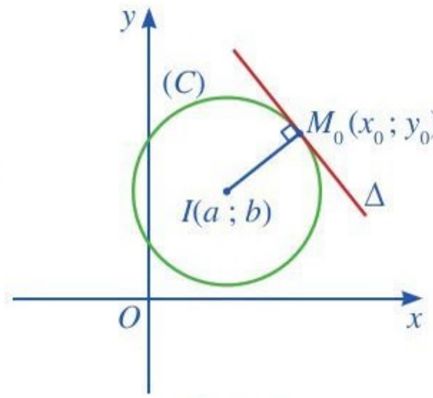
4 Cho điểm $M_0(x_0 ; y_0)$ nằm trên đường tròn (C) tâm $I(a ; b)$ bán kính R.

Gọi Δ là tiếp tuyến tại điểm $M_0(x_0 ; y_0)$ thuộc đường tròn (*Hình 44*).

a) Chứng tỏ rằng $\overrightarrow{IM_0}$ là vectơ pháp tuyến của đường thẳng Δ.

b) Tính toạ độ của $\overrightarrow{IM_0}$.

c) Lập phương trình tổng quát của đường thẳng Δ.



Hình 44

Cho đường tròn (C) tâm $I(a ; b)$ và điểm $M_0(x_0 ; y_0)$ nằm trên đường tròn đó. Gọi Δ là tiếp tuyến của đường tròn (C) tại điểm $M_0(x_0 ; y_0)$. Khi đó, ta có:

- Đường thẳng Δ đi qua điểm $M_0(x_0 ; y_0)$ và có vectơ pháp tuyến
$$\overrightarrow{IM_0} = (x_0 - a ; y_0 - b).$$
- Phương trình tiếp tuyến Δ là
$$(x_0 - a)(x - x_0) + (y_0 - b)(y - y_0) = 0.$$

Ví dụ 5 Lập phương trình tiếp tuyến tại điểm $M_0(2 ; 1)$ thuộc đường tròn
$$(x - 1)^2 + (y - 3)^2 = 5.$$

Giải

Đường tròn có tâm $I(1 ; 3)$. Phương trình tiếp tuyến tại điểm $M_0(2 ; 1)$ thuộc đường tròn $(x-1)^2 + (y-3)^2 = 5$ là

$$(2 - 1)(x - 2) + (1 - 3)(y - 1) = 0$$
$$\Leftrightarrow 1(x - 2) - 2(y - 1) = 0 \Leftrightarrow x - 2y = 0.$$

4 Lập phương trình tiếp tuyến tại điểm $M_0(-1 ; -4)$ thuộc đường tròn
$$(x - 3)^2 + (y + 7)^2 = 25.$$

Ví dụ 6 Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, một vật chuyển động tròn đều ngược chiều kim đồng hồ trên đường tròn tâm $I(3 ; 2)$ bán kính 5 dưới tác dụng của lực căng dây. Khi vật chuyển động tới điểm $M(6 ; 6)$ thì dây căng bị đứt.

a) Viết phương trình quỹ đạo chuyển động của vật sau khi dây bị đứt, biết rằng vật chỉ chịu tác động của duy nhất lực căng dây trong bài toán này.

b) Một vật khác chuyển động thẳng đều trên đường thẳng có phương trình
$$d\colon 3x + 4y + 23 = 0.$$
Chứng minh hai vật này không gặp nhau tại bất kì thời điểm nào.

Giải

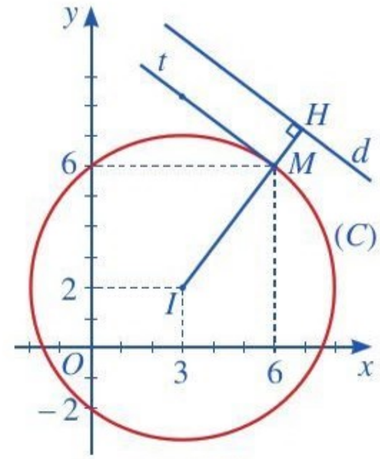
a) Quỹ đạo chuyển động của vật thứ nhất trước khi dây bị đứt là đường tròn (C) (*Hình 45*) có phương trình:

$$(x-3)^2+(y-2)^2=5^2 \Leftrightarrow (x-3)^2+(y-2)^2=25.$$

Khi dây bị đứt, do vật thứ nhất chỉ chịu tác động của duy nhất lực căng dây nên vật đó tiếp tục chuyển động theo tiếp tuyến Mt tại điểm $M(6\ ;\ 6)$ thuộc đường tròn (C). Phương trình tiếp tuyến Mt là:

$$(6-3)(x-6)+(6-2)(y-6)=0$$

$$\Leftrightarrow 3(x-6)+4(y-6)=0 \Leftrightarrow 3x+4y-42=0.$$



Hình 45

Vậy quỹ đạo chuyển động của vật thứ nhất sau khi dây bị đứt là tia Mt nằm trên đường thẳng có phương trình là: $3x+4y-42=0$.

b) Khoảng cách từ tâm đường tròn (C) đến đường thẳng d: $3x+4y+23=0$ là:

$$IH=\frac{|3.3+4.2+23|}{\sqrt{3^2+4^2}}=8>5.$$

Vì khoảng cách từ tâm đường tròn (C) đến đường thẳng d lớn hơn bán kính của đường tròn (C) nên đường tròn (C) và đường thẳng d không có điểm chung, tức là vật thứ hai không gặp vật thứ nhất khi dây chưa đứt. Mặt khác, vì $d \parallel Mt$ nên vật thứ hai không gặp vật thứ nhất sau khi dây bị đứt. Vậy hai vật không bao giờ gặp nhau.

BÀI TẬP

1. Phương trình nào sau đây là phương trình đường tròn?

a) $x^2+y^2-2x+2y-7=0$;

b) $x^2+y^2-8x+2y+20=0$.

2. Tìm tâm và bán kính của đường tròn trong mỗi trường hợp sau:

a) Đường tròn có phương trình $(x+1)^2+(y-5)^2=9$;

b) Đường tròn có phương trình $x^2+y^2-6x-2y-15=0$.

3. Lập phương trình đường tròn trong mỗi trường hợp sau:

a) Đường tròn có tâm $I(-3\ ;\ 4)$ bán kính $R=9$;

b) Đường tròn có tâm $I(5\ ;\ -2)$ và đi qua điểm $M(4\ ;\ -1)$;

c) Đường tròn có tâm $I(1\ ;\ -1)$ và có một tiếp tuyến là Δ: $5x-12y-1=0$;

d) Đường tròn đường kính AB với $A(3\ ;\ -4)$ và $B(-1\ ;\ 6)$;

e) Đường tròn đi qua ba điểm $A(1\ ;\ 1)$, $B(3\ ;\ 1)$, $C(0\ ;\ 4)$.

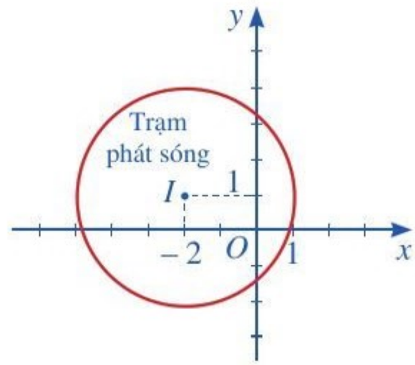
4. Lập phương trình tiếp tuyến tại điểm có hoành độ bằng 3 thuộc đường tròn
$$(x+2)^2+(y+7)^2=169.$$

5. Tìm m sao cho đường thẳng $3x+4y+m=0$ tiếp xúc với đường tròn
$$(x+1)^2+(y-2)^2=4.$$

6. *Hình 46* mô phỏng một trạm thu phát sóng điện thoại di động đặt ở vị trí I có toạ độ $(-2\,;1)$ trong mặt phẳng toạ độ (đơn vị trên hai trục là ki-lô-mét).

a) Lập phương trình đường tròn mô tả ranh giới bên ngoài của vùng phủ sóng, biết rằng trạm thu phát sóng đó được thiết kế với bán kính phủ sóng 3 km.

b) Nếu người dùng điện thoại ở vị trí có toạ độ $(-1\,;3)$ thì có thể sử dụng dịch vụ của trạm này không? Giải thích.



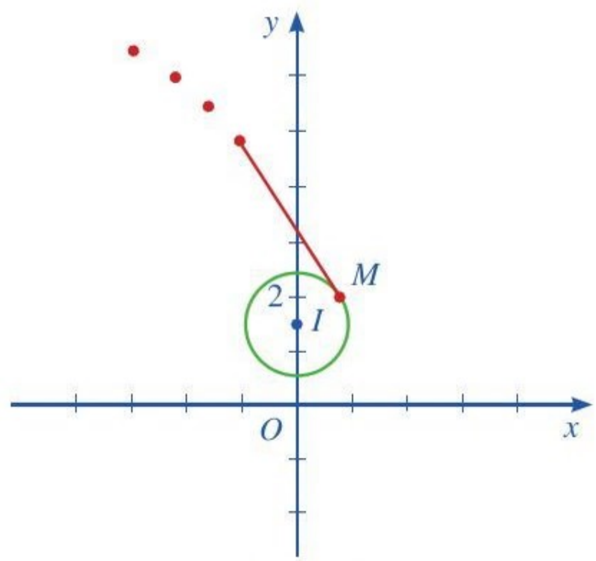
Hình 46

c) Tính theo đường chim bay, xác định khoảng cách ngắn nhất để một người ở vị trí có toạ độ $(-3\,;4)$ di chuyển được tới vùng phủ sóng theo đơn vị ki-lô-mét (làm tròn kết quả đến hàng phần mười).

7. Ném đĩa là một môn thể thao thi đấu trong Thế vận hội Olympic mùa hè. Khi thực hiện cú ném, vận động viên thường quay lưng lại với hướng ném, sau đó xoay ngược chiều kim đồng hồ một vòng rưỡi của đường tròn để lấy đà rồi thả tay ra khỏi đĩa.

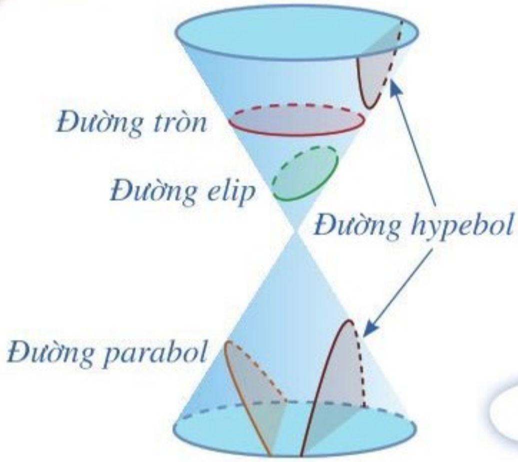
Giả sử đĩa chuyển động trên một đường tròn tâm $I\left(0\,;\dfrac{3}{2}\right)$ bán kính 0,8 trong mặt phẳng toạ độ Oxy (đơn vị trên hai trục là mét). Đến điểm $M\left(\dfrac{\sqrt{39}}{10}\,;2\right)$, đĩa được ném đi (*Hình 47*). Trong những giây đầu tiên ngay sau khi được ném đi, quỹ đạo chuyển động của chiếc đĩa có phương trình như thế nào?


(*Nguồn: https://shutterstock.com*)



Hình 47

§6 BA ĐƯỜNG CONIC



Hình 48

Từ xa xưa, người Hy Lạp đã biết rằng giao tuyến của mặt nón tròn xoay và một mặt phẳng không đi qua đỉnh của mặt nón là đường tròn hoặc đường cong mà ta gọi là đường conic (*Hình 48*). Từ "đường conic" xuất phát từ gốc tiếng Hy Lạp *konos*, nghĩa là mặt nón.

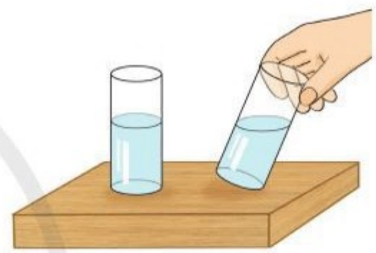
Đường conic gồm những loại đường nào và được xác định như thế nào?

I. ĐƯỜNG ELIP

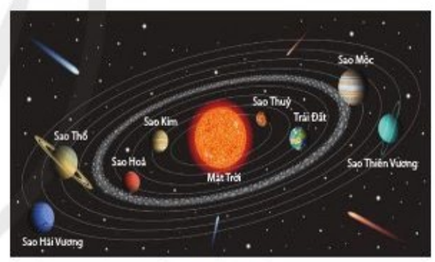
1. Định nghĩa đường elip

Đường elip là một đường quen thuộc với chúng ta và thường gặp trong thực tế, chẳng hạn:

– Quan sát một cốc thuỷ tinh hình trụ có chứa nước màu: Nếu đặt đứng cốc nước trên mặt bàn nằm ngang thì mặt thoáng của nước trong cốc là một hình tròn, giới hạn bởi một đường tròn. Nếu ta nghiêng cốc nước đi thì mặt thoáng của nước được giới hạn bởi một đường elip (*Hình 49*).


Hình 49

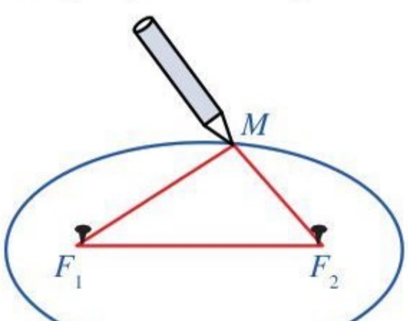
– Nhà thiên văn học người Đức là Johannes Kepler (1571 – 1630) đã chứng tỏ rằng: Mỗi hành tinh trong Hệ Mặt Trời đều chuyển động theo quỹ đạo là một đường elip (*Hình 50*).



Hình 50

1 Đóng hai chiếc đinh cố định tại hai điểm F_1, F_2 trên mặt một bảng gỗ. Lấy một vòng dây kín không đàn hồi có độ dài lớn hơn $2F_1F_2$. Quàng vòng dây đó qua hai chiếc đinh và kéo căng tại vị trí của đầu bút chì (*Hình 51*). Di chuyển đầu bút chì sao cho dây luôn căng, đầu bút chì vạch nên một đường mà ta gọi là *đường elip*. Gọi vị trí của đầu bút chì là điểm M.

Khi M thay đổi, có nhận xét gì về tổng độ dài $MF_1 + MF_2$?



Hình 51

Khi M thay đổi, tổng $MF_1 + MF_2$ là một độ dài không đổi.

Cho hai điểm F_1, F_2 cố định có khoảng cách $F_1F_2 = 2c$ ($c > 0$).

Đường elip (còn gọi là elip) là tập hợp các điểm M trong mặt phẳng sao cho $MF_1 + MF_2 = 2a$, trong đó a là số cho trước lớn hơn c.

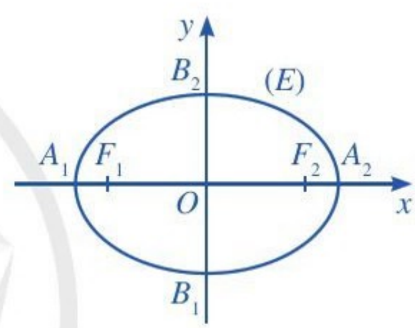
Hai điểm F_1 và F_2 được gọi là hai tiêu điểm của elip.

2. Phương trình chính tắc của elip

Thông thường ta thiết lập phương trình của một đường (thẳng hoặc cong) trong mặt phẳng toạ độ theo hệ trục toạ độ Oxy cho trước. Tuy nhiên, đối với đường elip, nếu làm như vậy thì phương trình thu được có thể sẽ phức tạp, không thuận tiện trong vận dụng. Vì vậy, khi lập phương trình của đường elip trên mặt phẳng, trước tiên ta sẽ chọn hệ trục toạ độ Oxy thuận tiện nhất.

2 Trong mặt phẳng, xét đường elip (E) là tập hợp các điểm M sao cho $MF_1 + MF_2 = 2a$, ở đó $F_1F_2 = 2c$ (với $a > c > 0$).

Ta chọn hệ trục toạ độ Oxy có gốc là trung điểm của F_1F_2, trục Oy là đường trung trực của F_1F_2 và F_2 nằm trên tia Ox (*Hình* 52). Khi đó, $F_1(-c\,;0)$ và $F_2(c\,;0)$ là hai tiêu điểm của elip (E). Chứng minh rằng:



Hình 52

a) $A_1(-a\,;0)$ và $A_2(a\,;0)$ đều là giao điểm của elip (E) với trục Ox.

b) $B_1(0\,;-b)$ và $B_2(0\,;b)$, ở đó $b = \sqrt{a^2 - c^2}$, đều là giao điểm của elip (E) với trục Oy.

Để chứng minh các khẳng định trên, ta làm như sau:

a) Do $A_1F_1 = a - c$ và $A_1F_2 = a + c$ nên $A_1F_1 + A_1F_2 = 2a$. Vậy $A_1(-a\,;0)$ thuộc elip (E). Mà $A_1(-a\,;0)$ thuộc trục Ox nên $A_1(-a\,;0)$ là giao điểm của elip (E) với trục Ox.

Tương tự, ta chứng minh được $A_2(a\,;0)$ là giao điểm của elip (E) với trục Ox.

b) Ta có:

$$B_2F_2 = \sqrt{(c-0)^2 + (0-b)^2} = \sqrt{c^2 + b^2} = \sqrt{a^2} = a.$$

Vì $B_2F_1 = B_2F_2$ nên $B_2F_1 + B_2F_2 = a + a = 2a$. Do đó, $B_2(0\,;b)$ thuộc elip (E). Mà $B_2(0\,;b)$ thuộc trục Oy nên $B_2(0\,;b)$ là giao điểm của elip (E) với trục Oy.

Tương tự, ta chứng minh được: $B_1(0\,;-b)$ là giao điểm của elip (E) với trục Oy.

Như vậy, elip (E) đi qua bốn điểm $A_1(-a\,;0)$, $A_2(a\,;0)$, $B_1(0\,;-b)$, $B_2(0\,;b)$, với $b = \sqrt{a^2 - c^2}$.

Ta chứng minh được rằng:

Khi chọn hệ trục toạ độ như trên, phương trình đường elip có thể viết dưới dạng

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \text{ trong đó } a > b > 0.$$

Đây gọi là *phương trình chính tắc của elip.*

Chú ý

Đối với elip (E) có phương trình chính tắc như đã nêu ở trên, ta có:

- $c^2 = a^2 - b^2$, ở đó $2c = F_1F_2$.
- Nếu điểm $M(x\,;\,y)$ thuộc elip (E) thì $-a \le x \le a$.

Ví dụ 1 Trong các phương trình sau, phương trình nào là phương trình chính tắc của đường elip?

a) $\frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{3^2} = 1$; b) $\frac{x^2}{4^2} + \frac{y^2}{3^2} = -1$; c) $\frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{4^2} = 1$; d) $\frac{x^2}{4^2} + \frac{y^2}{3^2} = 1$.

Giải

Phương trình chính tắc của elip có dạng $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, với $a > b > 0$ nên chỉ có trường hợp d) là phương trình chính tắc của đường elip.

Ví dụ 2 Lập phương trình chính tắc của elip (E) có một tiêu điểm là $F_2(5\,;\,0)$ và đi qua điểm $M(0\,;\,3)$.

Giải

Elip (E) có phương trình chính tắc là:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \ (a > b > 0).$$

Do $F_2(5\,;\,0)$ là một tiêu điểm của (E) nên $c = 5$. Điểm $M(0\,;\,3)$ nằm trên (E) nên $\frac{0^2}{a^2} + \frac{3^2}{b^2} = 1$. Do đó $b^2 = 9$, suy ra $a^2 = b^2 + c^2 = 9 + 25 = 34$.

Vậy elip (E) có phương trình chính tắc là:

$$\frac{x^2}{34} + \frac{y^2}{9} = 1.$$

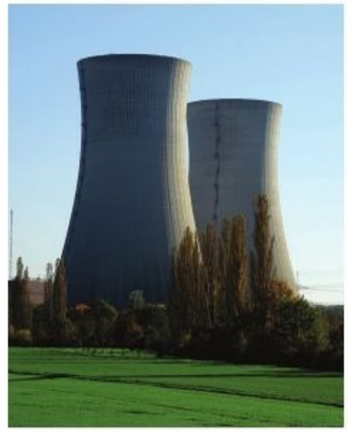
1 Lập phương trình chính tắc của elip (E) đi qua hai điểm $M(0\,;\,3)$ và $N\left(3\,;\,-\frac{12}{5}\right)$.

II. ĐƯỜNG HYPEBOL

Đường hypebol là một đường quen thuộc với chúng ta và thường gặp trong thực tế, chẳng hạn:

Mặt cắt đứng của một tháp cảng được thiết kế có dạng hypebol. Dạng thiết kế đó đòi hỏi ít vật liệu xây dựng hơn so với những dạng hình khác.

(*Nguồn: https://flickr.com*)

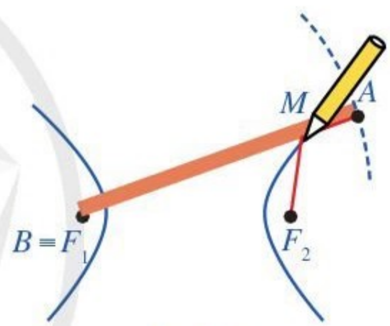


Mặt cắt đứng của ống khói nhà máy điện hạt nhân được thiết kế có dạng hypebol.

(*Nguồn: https://pixabay.com*)

1. Định nghĩa đường hypebol

3 Đóng hai chiếc đinh cố định tại hai điểm F_1, F_2 trên mặt một bảng gỗ. Lấy một thước thẳng có mép AB và một sợi dây không đàn hồi có chiều dài l thoả mãn $AB - F_1F_2 < l < AB$. Đính một đầu dây vào điểm A và đầu dây kia vào F_2. Đặt thước sao cho điểm B trùng với F_1 và lấy đầu bút chì (kí hiệu là M) tì sát sợi dây vào thước thẳng sao cho sợi dây luôn bị căng. Sợi dây khi đó là đường gấp khúc AMF_2.



Hình 53

Cho thước quay quanh điểm B (trùng F_1), tức là điểm A chuyển động trên đường tròn tâm B có bán kính bằng độ dài đoạn thẳng AB, mép thước luôn áp sát mặt gỗ (*Hình 53*). Khi đó, đầu bút chì M sẽ vạch nên một đường mà ta gọi là *đường hypebol*.

Khi M thay đổi, có nhận xét gì về hiệu $MF_1 - MF_2$?

Khi M thay đổi, hiệu

$$MF_1 - MF_2 = (MF_1 + MA) - (MF_2 + MA) = AB - l \text{ không đổi.}$$

Cho hai điểm F_1, F_2 cố định có khoảng cách $F_1F_2 = 2c$ ($c > 0$).

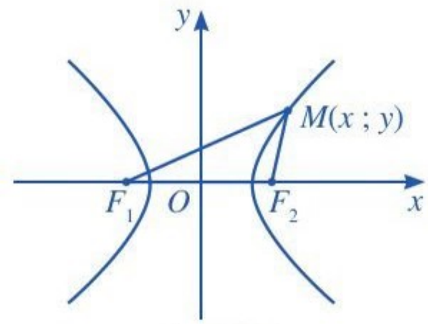
Đường hypebol (còn gọi là hypebol) là tập hợp các điểm M sao cho $|MF_1 - MF_2| = 2a$, trong đó a là số dương cho trước nhỏ hơn c.

Hai điểm F_1 và F_2 được gọi là hai tiêu điểm của hypebol.

2. Phương trình chính tắc của đường hypebol

4 Để lập phương trình của đường hypebol trong mặt phẳng, trước tiên ta sẽ chọn hệ trục toạ độ *Oxy* thuận tiện nhất.

Tương tự elip, ta chọn trục *Ox* là đường thẳng F_1F_2, trục *Oy* là đường trung trực của đoạn thẳng $F_1F_2 = 2c$ $(c > 0)$, gốc toạ độ *O* là trung điểm của đoạn thẳng F_1F_2 (*Hình 54*).



Hình 54

a) Tìm toạ độ của hai tiêu điểm F_1, F_2.

b) Nêu dự đoán thích hợp cho $\boxed{?}$ trong bảng sau:

Elip	**Hypebol**
Hai tiêu điểm $F_1(-c\ ;0)$, $F_2(c\ ;0)$.	Hai tiêu điểm $F_1(-c\ ;0)$, $F_2(c\ ;0)$.
Elip (*E*) là tập hợp các điểm *M* sao cho: $MF_1 + MF_2 = 2a.$	Hypebol (*H*) là tập hợp các điểm *M* sao cho: $\lvert MF_1 - MF_2 \rvert = 2a.$
Elip (*E*) có phương trình chính tắc là: $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1,$ trong đó $a^2 = c^2 + b^2$.	Hypebol (*H*) có phương trình chính tắc là: $\dfrac{x^2}{a^2} \boxed{?} \dfrac{y^2}{b^2} = 1,$ trong đó $a^2 = c^2 \boxed{?} b^2$.

Ta chứng minh được rằng:

Khi chọn hệ trục toạ độ như trên, phương trình đường hypebol có thể viết dưới dạng

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \text{ trong đó } a > 0,\ b > 0.$$

Đây gọi là *phương trình chính tắc của hypebol*.

Chú ý

Đối với hypebol (*H*) có phương trình chính tắc như đã nêu ở trên, ta có:

- $c^2 = a^2 + b^2$, ở đó $2c = F_1F_2$, và điều kiện $a > b$ là không bắt buộc.
- Nếu điểm $M(x\ ;y)$ thuộc hypebol (*H*) thì $x \le -a$ hoặc $x \ge a$.

Ví dụ 3 Trong các phương trình sau, phương trình nào là phương trình chính tắc của đường hypebol?

a) $\frac{x^2}{5^2} - \frac{y^2}{4^2} = -1$;   b) $\frac{x^2}{4^2} - \frac{y^2}{5^2} = 1$;

c) $\frac{x^2}{5^2} - \frac{y^2}{5^2} = 1$;   d) $\frac{x^2}{5^2} - \frac{y^2}{4^2} = 1$.

Giải

Phương trình chính tắc của hypebol có dạng $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, với $a > 0$, $b > 0$ nên các trường hợp b), c), d) là phương trình chính tắc của đường hypebol.

> **2** Viết phương trình hypebol sau đây dưới dạng chính tắc:
> $$4x^2 - 9y^2 = 1.$$

Ví dụ 4 Viết phương trình chính tắc của đường hypebol (H) có một tiêu điểm là $F_2(6 ; 0)$ và đi qua điểm $A_2(4 ; 0)$.

Giải

Giả sử hypebol (H) có phương trình chính tắc là $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ với $a > 0, b > 0$.

Do $A_2(4 ; 0)$ thuộc (H) nên $\frac{4^2}{a^2} - \frac{0^2}{b^2} = 1$, suy ra $a = 4$. Mà $F_2(6 ; 0)$ là tiêu điểm của (H) nên $c = 6$. Suy ra

$$b^2 = c^2 - a^2 = 36 - 16 = 20.$$

Vậy hypebol (H) có phương trình chính tắc là $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{20} = 1$.

III. ĐƯỜNG PARABOL

Cũng như hai đường elip và hypebol, đường parabol là một đường quen thuộc với chúng ta và thường gặp trong thực tế, chẳng hạn:

Để giảm lực tác động lên cây cầu người ta thiết kế cầu có dạng hình parabol quay bề lõm xuống phía dưới.

(*Nguồn: https://commons.wikimedia.org*)

Đài phun nước với các tia nước có dạng hình parabol

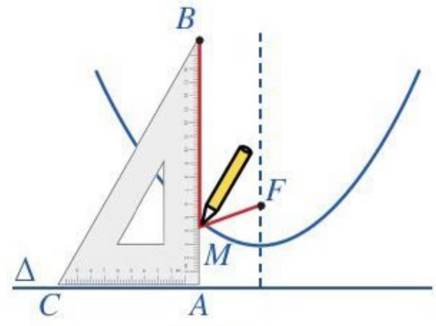
(*Nguồn: https://commons.wikimedia.org*)

1. Định nghĩa đường parabol

5 Lấy đường thẳng Δ và một điểm F không thuộc Δ. Lấy một ê ke ABC (vuông ở A) và một đoạn dây không đàn hồi, có độ dài bằng AB. Đính một đầu dây vào điểm F, đầu kia vào đỉnh B của ê ke. Đặt ê ke sao cho cạnh AC nằm trên Δ, lấy đầu bút chì (kí hiệu là điểm M) ép sát sợi dây vào cạnh AB và giữ căng sợi dây. Lúc này, sợi dây chính là đường gấp khúc BMF.

Cho cạnh AC của ê ke trượt trên Δ (*Hình 55*). Khi đó, đầu bút chì M sẽ vạch nên một đường mà ta gọi là *đường parabol*.

Khi M thay đổi, có nhận xét gì về khoảng cách từ M đến F và khoảng cách từ M đến đường thẳng Δ?



Hình 55

Khi M thay đổi, ta có: $MA + MB = MF + MB$ $(= AB)$.
Do đó $MA = MF$.

Cho một điểm F cố định và một đường thẳng Δ cố định không đi qua F.

Đường parabol (còn gọi là parabol) là tập hợp các điểm M trong mặt phẳng cách đều F và Δ.

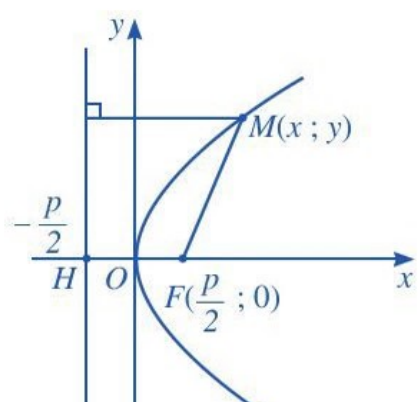
Điểm F được gọi là tiêu điểm của parabol. Đường thẳng Δ được gọi là đường chuẩn của parabol.

2. Phương trình chính tắc của parabol

6 Cho parabol (P) với tiêu điểm F và đường chuẩn Δ.

Cũng như elip, để lập phương trình của (P), trước tiên ta sẽ chọn hệ trục toạ độ Oxy thuận tiện nhất.

Kẻ FH vuông góc với Δ $(H \in \Delta)$. Đặt $FH = p > 0$. Ta chọn hệ trục toạ độ Oxy sao cho O là trung điểm đoạn thẳng FH và F nằm trên tia Ox (*Hình 56*).



Hình 56

Suy ra: $F\left(\frac{p}{2}; 0\right)$, $H\left(-\frac{p}{2}; 0\right)$ và phương trình đường thẳng Δ là $x + \frac{p}{2} = 0$.

Do đó khoảng cách từ $M(x\,;\,y) \in (P)$ đến đường thẳng Δ là $\left|x + \frac{p}{2}\right|$.

Ta có: $M(x\,;\,y) \in (P)$ khi và chỉ khi độ dài MF bằng khoảng cách từ M tới Δ, tức là:

$$\sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2} = \left|x + \frac{p}{2}\right| \Leftrightarrow \left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2 = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow y^2 = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 - \left(x - \frac{p}{2}\right)^2 \Leftrightarrow y^2 = 2px.$$

Khi chọn hệ trục toạ độ như trên, phương trình đường parabol có thể viết dưới dạng

$$y^2 = 2px \ (p > 0).$$

Đây gọi là *phương trình chính tắc của parabol.*

Chú ý: Đối với parabol (P) có phương trình chính tắc $y^2 = 2px$ $(p > 0)$, ta có:

- Tiêu điểm là $F\left(\frac{p}{2}\,;\,0\right)$ và phương trình đường chuẩn là: $x + \frac{p}{2} = 0$.
- Nếu điểm $M(x\,;\,y)$ thuộc parabol (P) thì $x \geq 0$.

Ví dụ 5 Trong các phương trình sau, phương trình nào là phương trình chính tắc của đường parabol?

a) $y^2 = -6x$; b) $y^2 = 6x$; c) $x^2 = -6y$; d) $x^2 = 6y$.

Giải

Phương trình chính tắc của parabol có dạng $y^2 = 2px$ với $p > 0$ nên chỉ có trường hợp b) là phương trình chính tắc của đường parabol.

Ví dụ 6 Viết phương trình chính tắc của parabol (P) biết:

a) (P) có tiêu điểm là $F(5\,;\,0)$; b) (P) đi qua điểm $M(2\,;\,1)$.

Giải

Gọi phương trình chính tắc của parabol (P) là: $y^2 = 2px$ $(p > 0)$.

a) Vì (P) có tiêu điểm là $F(5\,;\,0)$ nên $\frac{p}{2} = 5$, tức là $p = 10$.

Vậy phương trình chính tắc của parabol (P) là $y^2 = 20x$.

b) Do điểm $M(2\,;\,1)$ nằm trên (P) nên $1^2 = 2p\,.\,2$, tức là $p = \frac{1}{4}$. Vậy phương trình chính tắc của parabol (P) là $y^2 = \frac{x}{2}$.

3 Viết phương trình các parabol sau đây dưới dạng chính tắc:

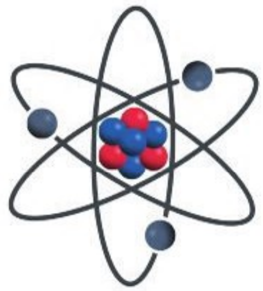
a) $x = \frac{y^2}{4}$;

b) $x - y^2 = 0$.

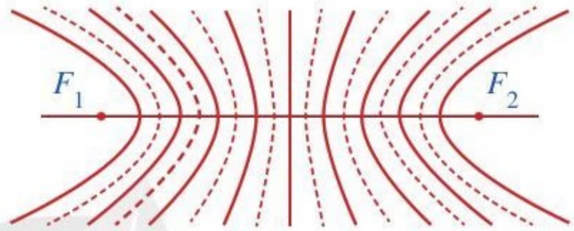
IV. MỘT SỐ ỨNG DỤNG THỰC TIỄN CỦA BA ĐƯỜNG CONIC

Ba đường conic có nhiều ứng dụng trong thực tiễn. Ta nêu ra một vài ứng dụng của ba đường conic.

1. Năm 1911, nhà vật lí học người Anh là Ernest Rutherford (1871 – 1937) đã đề xuất mô hình hành tinh nguyên tử, trong đó hạt nhân nhỏ bé nằm tại tâm của nguyên tử, còn các electron bay quanh hạt nhân trên các quỹ đạo hình elip như các hành tinh bay quanh Mặt Trời (*Hình 57*).



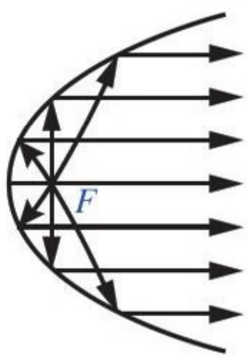
Hình 57



Hình 58

2. Trong vật lí, hiện tượng hai sóng gặp nhau tạo nên các gợn sóng ổn định gọi là hiện tượng giao thoa của hai sóng. Các gợn sóng có hình các đường hypebol gọi là các vân giao thoa (*Hình 58*).

3. Với gương parabol, tia sáng phát ra từ tiêu điểm (tia tới) chiếu đến một điểm của parabol sẽ bị hắt lại (tia phản xạ) theo một tia song song (hoặc trùng) với trục của parabol (*Hình 59*).



Hình 59

Hình 60

Hình 61

Tính chất trên có nhiều ứng dụng, chẳng hạn:

– Đèn pha: Bề mặt của đèn pha là một mặt tròn xoay sinh bởi một cung parabol quay quanh trục của nó, bóng đèn được đặt ở vị trí tiêu điểm của parabol đó (*Hình 60*). Các tia sáng phát ra từ bóng đèn khi chiếu đến bề mặt của đèn pha sẽ bị hắt lại theo các tia sáng song song, cho phép chúng ta quan sát được các vật ở xa.

– Chảo vệ tinh cũng có dạng như đèn pha. Điểm thu và phát tín hiệu của máy được đặt ở vị trí tiêu điểm của parabol (*Hình 61*).

BÀI TẬP

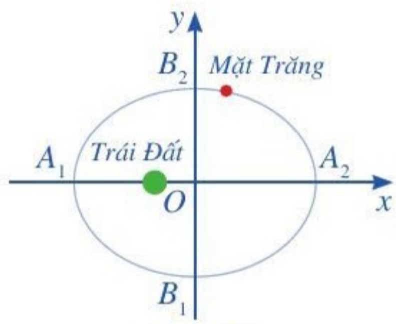
1. Phương trình nào sau đây là phương trình chính tắc của elip?

a) $\frac{x^2}{64}+\frac{y^2}{64}=1$; b) $\frac{x^2}{64}-\frac{y^2}{64}=1$; c) $\frac{x^2}{64}+\frac{y^2}{25}=1$; d) $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{64}=1$.

2. Cho elip (E) có phương trình chính tắc $\frac{x^2}{49}+\frac{y^2}{25}=1$. Tìm toạ độ các giao điểm của (E) với trục Ox, Oy và toạ độ các tiêu điểm của (E).

3. Viết phương trình chính tắc của elip (E), biết toạ độ hai giao điểm của (E) với Ox và Oy lần lượt là $A_1(-5\,;0)$ và $B_2(0\,;\sqrt{10})$.

4. Ta biết rằng Mặt Trăng chuyển động quanh Trái Đất theo quỹ đạo là một elip mà Trái Đất là một tiêu điểm. Elip đó có $A_1A_2 = 768\ 800$ km và $B_1B_2 = 767\ 619$ km (*Nguồn: Ron Larson (2014), Precalculus Real Mathematics, Real People, Cengage*) (*Hình 62*). Viết phương trình chính tắc của elip đó.



Hình 62

5. Những phương trình nào sau đây là phương trình chính tắc của hypebol?

a) $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{9}=1$; b) $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{9}=1$; c) $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{64}=1$; d) $\frac{x^2}{64}-\frac{y^2}{9}=1$.

6. Tìm toạ độ các tiêu điểm của đường hypebol trong mỗi trường hợp sau:

a) $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$; b) $\frac{x^2}{36}-\frac{y^2}{25}=1$.

7. Viết phương trình chính tắc của hypebol (H), biết $N(\sqrt{10}\,;2)$ nằm trên (H) và hoành độ một giao điểm của (H) với trục Ox bằng 3.

8. Những phương trình nào sau đây là phương trình chính tắc của parabol?

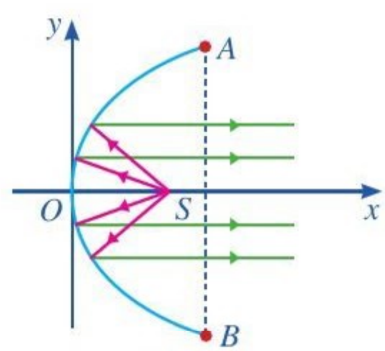
a) $y^2=-2x$; b) $y^2=2x$; c) $x^2=-2y$; d) $y^2=\sqrt{5}x$.

9. Tìm toạ độ tiêu điểm và viết phương trình đường chuẩn của đường parabol trong mỗi trường hợp sau:

a) $y^2=\frac{5x}{2}$; b) $y^2=2\sqrt{2}x$.

10. Viết phương trình chính tắc của đường parabol, biết tiêu điểm là $F(6\,;0)$.

11. Một chiếc đèn có mặt cắt ngang là hình parabol (*Hình 63*). Hình parabol có chiều rộng giữa hai mép vành là $AB = 40$ cm và chiều sâu $h = 30$ cm (h bằng khoảng cách từ O đến AB). Bóng đèn nằm ở tiêu điểm S. Viết phương trình chính tắc của parabol đó.



Hình 63

BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG VII

Chọn chữ cái đứng trước phương án đúng (từ bài 1 đến bài 4)

1. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho $A(3 ; 4)$, $B(2 ; 5)$. Toạ độ của $\overrightarrow{AB}$ là:

A. $(1 ; -1)$. B. $(1 ; 1)$. C. $(-1 ; 1)$. D. $(-1 ; -1)$.

2. Vectơ nào sau đây là một vectơ pháp tuyến của đường thẳng Δ: $2x - 3y + 4 = 0$?

A. $\vec{n}_1 = (3 ; 2)$. B. $\vec{n}_2 = (2 ; 3)$.

C. $\vec{n}_3 = (3 ; -2)$. D. $\vec{n}_4 = (2 ; -3)$.

3. Toạ độ tâm I của đường tròn (C): $(x + 6)^2 + (y - 12)^2 = 81$ là:

A. $(6 ; -12)$. B. $(-6 ; 12)$. C. $(-12 ; 6)$. D. $(12 ; -6)$.

4. Khoảng cách từ điểm $A(1 ; 1)$ đến đường thẳng Δ: $3x + 4y + 13 = 0$ bằng:

A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

5. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho tam giác MNP có $M(2 ; 1)$, $N(-1 ; 3)$, $P(4 ; 2)$.

a) Tìm toạ độ của các vectơ $\overrightarrow{OM}$, $\overrightarrow{MN}$, $\overrightarrow{MP}$;

b) Tính tích vô hướng $\overrightarrow{MN} . \overrightarrow{MP}$;

c) Tính độ dài các đoạn thẳng MN, MP;

d) Tính $\cos\widehat{NMP}$;

e) Tìm toạ độ trung điểm I của NP và trọng tâm G của tam giác MNP.

6. Lập phương trình tổng quát và phương trình tham số của đường thẳng d trong mỗi trường hợp sau:

a) d đi qua điểm $A(-3 ; 2)$ và có một vectơ pháp tuyến là $\vec{n} = (2 ; -3)$;

b) d đi qua điểm $B(-2 ; -5)$ và có một vectơ chỉ phương là $\vec{u} = (-7 ; 6)$;

c) d đi qua hai điểm $C(4 ; 3)$ và $D(5 ; 2)$.

7. Lập phương trình đường tròn (C) trong mỗi trường hợp sau:

a) (C) có tâm $I(-4 ; 2)$ và bán kính $R = 3$;

b) (C) có tâm $P(3 ; -2)$ và đi qua điểm $E(1 ; 4)$;

c) (C) có tâm $Q(5 ; -1)$ và tiếp xúc với đường thẳng Δ: $3x + 4y - 1 = 0$;

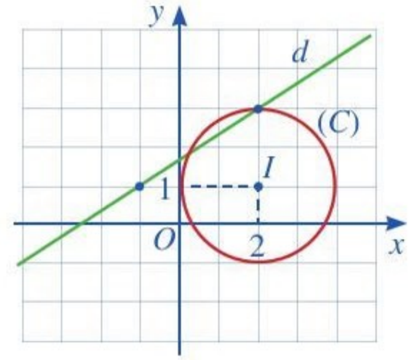
d) (C) đi qua ba điểm $A(-3 ; 2)$, $B(-2 ; -5)$ và $D(5 ; 2)$.

8. Quan sát *Hình 64* và thực hiện các hoạt động sau:

a) Lập phương trình đường thẳng d;

b) Lập phương trình đường tròn (C);

c) Lập phương trình tiếp tuyến của đường tròn (C) tại điểm $M(2 + \sqrt{2}\,;\, 1 + \sqrt{2})$.



Hình 64

9. Cho hai đường thẳng

$\Delta_1\colon \sqrt{3}x + y - 4 = 0$, $\Delta_2\colon x + \sqrt{3}y - 2\sqrt{3} = 0$.

a) Tìm toạ độ giao điểm hai đường thẳng đã cho;

b) Tính góc α giữa hai đường thẳng đã cho.

10. Cho biết mỗi đường conic có phương trình dưới đây là đường conic dạng nào (elip, hypebol, parabol) và tìm toạ độ tiêu điểm của đường conic đó.

a) $y^2 = 18x$; b) $\dfrac{x^2}{64} + \dfrac{y^2}{25} = 1$; c) $\dfrac{x^2}{9} - \dfrac{y^2}{16} = 1$.

11. Cho tam giác AF_1F_2, trong đó $A(0\,;\,4)$, $F_1(-3\,;\,0)$, $F_2(3\,;\,0)$.

a) Lập phương trình tổng quát của các đường thẳng AF_1 và AF_2.

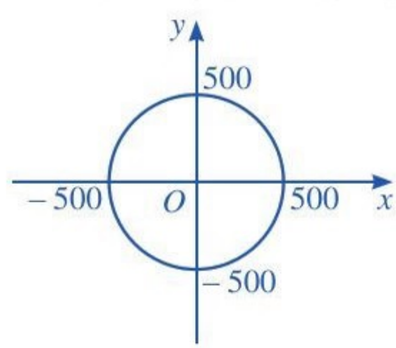
b) Lập phương trình đường tròn ngoại tiếp của tam giác AF_1F_2.

c) Lập phương trình chính tắc của elip (E) có hai tiêu điểm là F_1, F_2 sao cho (E) đi qua A.

12. Trên màn hình ra đa của đài kiểm soát không lưu sân bay A có hệ trục toạ độ Oxy (*Hình 65*), trong đó đơn vị trên mỗi trục tính theo ki-lô-mét và đài kiểm soát được coi là gốc toạ độ $O(0\,;\,0)$. Nếu máy bay bay trong phạm vi cách đài kiểm soát 500 km thì sẽ hiển thị trên màn hình ra-đa như một điểm chuyển động trong mặt phẳng với hệ trục toạ độ Oxy.

Một máy bay khởi hành từ sân bay B lúc 14 giờ. Sau thời gian t (giờ), vị trí của máy bay được xác định bởi điểm M có toạ độ như sau:

$$\begin{cases} x = \dfrac{1\,600}{3} - \dfrac{1\,400}{3}t \\ y = \dfrac{1\,900}{3} - \dfrac{1\,400}{3}t. \end{cases}$$



Hình 65

a) Tìm vị trí của máy bay lúc 14 giờ 30 phút. Thời điểm này máy bay đã xuất hiện trên màn hình ra-đa chưa?

b) Lúc mấy giờ máy bay bay gần đài kiểm soát không lưu nhất? Tính khoảng cách giữa máy bay và đài kiểm soát không lưu lúc đó.

c) Máy bay ra khỏi màn hình ra-đa vào thời gian nào?

THỰC HÀNH PHẦN MỀM GEOGEBRA
(NẾU NHÀ TRƯỜNG CÓ ĐIỀU KIỆN THỰC HIỆN)

I. GIỚI THIỆU PHẦN MỀM GEOGEBRA

Hiện nay, trên thế giới có nhiều phần mềm toán học, trong đó có phần mềm GeoGebra. GeoGebra là phần mềm miễn phí, dễ sử dụng, thân thiện với người dùng và có các phiên bản cho khoảng 80 ngôn ngữ khác nhau. Sau khi đã cài đặt phần mềm, việc chuyển đổi ngôn ngữ (chẳng hạn từ tiếng Anh sang tiếng Việt) hết sức đơn giản. Phần mềm GeoGebra có phạm vi sử dụng rất rộng (Hình học phẳng, Hình học không gian, Đại số, Giải tích, Xác suất, Thống kê, Bảng tính điện tử) và trên nhiều hệ điều hành khác nhau, có thể chạy trực tuyến (online) hoặc cài đặt vào máy tính, điện thoại thông minh và hỗ trợ rất tốt cho việc dạy học môn Toán cũng như giáo dục STEM.

Để sử dụng phần mềm GeoGebra, chúng ta có thể sử dụng online tại địa chỉ https://www.geogebra.org/ hoặc tải từ địa chỉ https://www.geogebra.org/download và cài đặt vào máy tính hoặc điện thoại thông minh, sau đó cài đặt ngôn ngữ Tiếng Việt để sử dụng.

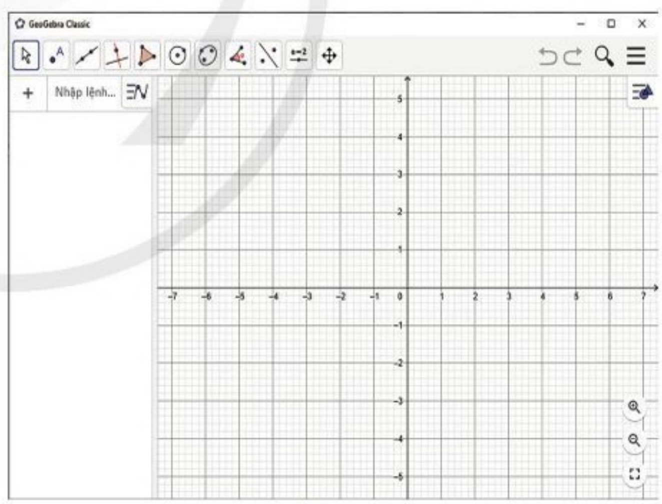
II. THỰC HÀNH PHẦN MỀM GEOGEBRA

1. Biểu diễn miền nghiệm hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn

Bước 1. Mở trang GeoGebra (*Hình 1*).

Bước 2. Nhập từng bất phương trình vào ô Nhập lệnh: và bấm enter.

Khi đó màn hình sẽ hiển thị miền nghiệm của từng bất phương trình, là miền được tô màu. Miền nghiệm của hệ là miền giao của từng bất phương trình và được biểu diễn bởi miền màu đậm hơn.



Hình 1

Ví dụ 1 Biểu diễn hình học tập nghiệm của hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn sau:

$$\begin{cases} 3x - y + 3 > 0 \\ -2x + 3y - 6 \le 0 \\ 2x + y + 4 \ge 0. \end{cases}$$

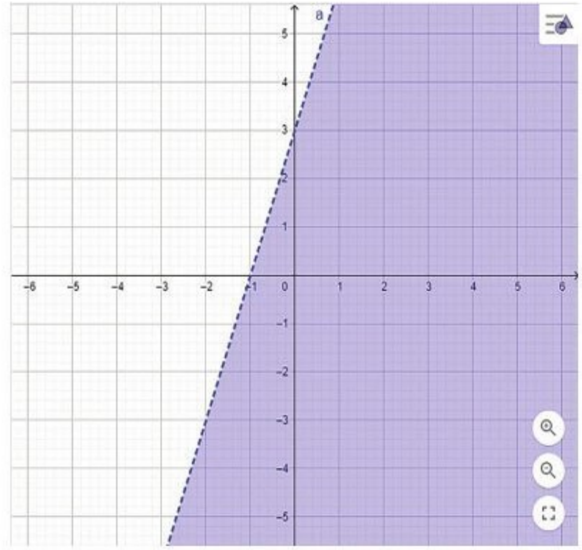
1 Biểu diễn hình học tập nghiệm của hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn sau:

$$\begin{cases} x - 2y + 3 \le 0 \\ x + 3y > -2 \\ x \le 0. \end{cases}$$

Hướng dẫn

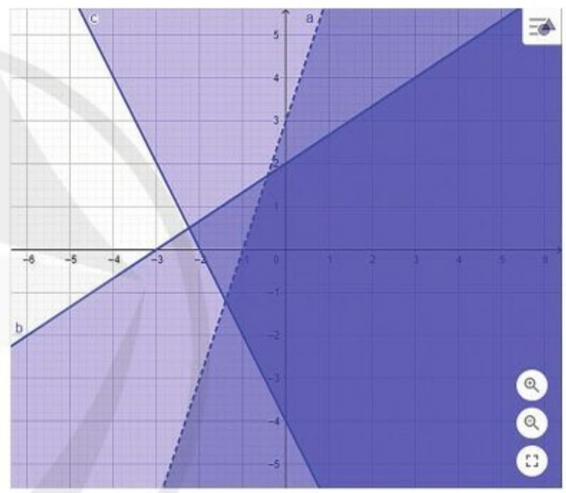
Bước 1. Mở trang GeoGebra.

Bước 2. Nhập bất phương trình $3x - y + 3 > 0$ vào ô Nhập lệnh: và bấm enter, màn hình sẽ hiển thị như *Hình 2*. Miền nghiệm của bất phương trình $3x - y + 3 > 0$ là miền được tô màu. Đường nét đứt biểu thị miền nghiệm không chứa các điểm nằm trên đường thẳng $3x - y + 3 = 0$.



Hình 2

Bước 3. Tiếp tục nhập từng bất phương trình còn lại như sau: $-2x + 3y - 6 \le 0$ (–2x+3y–6<=0); $2x + y + 4 \ge 0$ (2x+y+4>=0). Khi đó màn hình sẽ hiển thị như *Hình 3*. Miền nghiệm của hệ là miền được tô màu đậm nhất. Các đường nét liền: $-2x + 3y - 6 = 0$; $2x + y + 4 = 0$ biểu thị các điểm nằm trên hai đường thẳng đó cũng thuộc miền nghiệm.



Hình 3

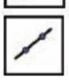
2. Vẽ các đường conic

a) Giới thiệu một số công cụ cơ bản trong phần mềm GeoGebra để vẽ hình

Sau đây là một số công cụ cơ bản trong phần mềm GeoGebra để vẽ hình:

 **Di chuyển:** Ta có thể sử dụng chuột để kéo và thả các đối tượng tự do. Khi ta nhấp chọn một đối tượng trong công cụ Di chuyển, ta có thể xoá đối tượng bằng nút Delete hoặc di chuyển đối tượng bằng các phím mũi tên.

 **Điểm mới:** Nháy chuột lên vùng làm việc để vẽ một điểm mới.

 **Đường thẳng (biết hai điểm thuộc đường thẳng):** Nháy chuột vào biểu tượng, sau đó nháy chuột lên vị trí điểm thứ nhất (ở vùng làm việc) rồi di chuyển con trỏ và nháy chuột lên vị trí điểm thứ hai.

 **Elip (biết hai tiêu điểm và một điểm thuộc elip đó):** Nháy chuột vào biểu tượng, sau đó nháy chuột lên vị trí hai điểm phân biệt ở vùng làm việc để vẽ hai tiêu điểm, rồi di chuyển con trỏ đến vị trí một điểm thuộc elip và nháy chuột.

Hypebol (biết hai tiêu điểm và một điểm thuộc hypebol đó): Cách làm tương tự như đối với elip.

Parabol (biết tiêu điểm và đường chuẩn): Vẽ đường chuẩn. Nháy chuột vào biểu tượng, sau đó nháy chuột lên vị trí một điểm ở vùng làm việc để vẽ tiêu điểm, rồi di chuyển con trỏ đến vị trí đường chuẩn và nháy chuột.

b) Thực hành vẽ ba đường conic

CÁCH 1. Dùng biểu tượng để vẽ elip (hypebol, parabol):

Nháy chuột vào biểu tượng (,) và thực hiện các bước như mô tả ở trên.

CÁCH 2. Dùng lệnh vẽ ba đường conic khi biết tiêu điểm và điểm thuộc đường conic (hoặc đường chuẩn):

– Để vẽ elip (hypebol) có toạ độ hai tiêu điểm (– c ; 0), (c ; 0) và đi qua điểm M(m ; n) ta nhập lệnh:

+ Đối với elip: Elip((–c,0),(c,0),(m,n)) rồi bấm enter.

+ Đối với hypebol: Hypebon((–c,0),(c,0),(m,n)) rồi bấm enter.

– Để vẽ parabol biết toạ độ tiêu điểm (c ; 0) và đường chuẩn x – a = 0, ta nhập lệnh: Parabon((c,0),x – a=0) rồi bấm enter.

Chú ý: Khi nhập lệnh, toạ độ của điểm được ngăn cách bởi dấu ",".

CÁCH 3. Dùng lệnh vẽ ba đường conic khi biết phương trình chính tắc:

– Trong trường hợp các số a, b, p có giá trị cụ thể:

+ Đối với elip: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, ta nhập phương trình vào ô Nhập lệnh: như sau:

x^2 / a^2 + y^2 / b^2 = 1 (hoặc sử dụng bàn phím ảo có công thức toán để nhập) rồi bấm enter.

+ Đối với hypebol: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$, ta nhập phương trình vào ô Nhập lệnh: như sau:

x^2 / a^2 – y^2 / b^2 = 1 (hoặc sử dụng bàn phím ảo có công thức toán để nhập) rồi bấm enter.

+ Đối với parabol: $y^2 = 2px$, ta nhập phương trình vào ô Nhập lệnh: như sau:

y^2=2*p*x (hoặc sử dụng bàn phím ảo có công thức toán để nhập) rồi bấm enter.

– Trong trường hợp các số a, b, p là các tham số có thể thay đổi giá trị:

+ Tạo thanh trượt a: Nháy vào a=2, sau đó nháy chuột lên vùng làm việc, khi đó trên vùng làm việc xuất hiện bảng cho phép thiết lập thông tin cho thanh trượt: tên thanh trượt (a), giá trị dạng số, giá trị cực tiểu, giá trị cực đại.

+ Tạo thanh trượt b và p: Làm tương tự như trên.

+ Nhập phương trình chính tắc của các đường conic vào ô Nhập lệnh: (giữ nguyên các tham số), sau đó bấm enter.

+ Dịch chuyển trên thanh trượt để thay đổi giá trị a, b, p ta được các hình đường conic tương ứng.

Ví dụ 2 Vẽ hình trong mỗi trường hợp:

a) Vẽ elip biết hai tiêu điểm $F_1(-3\ ;\ 0)$, $F_2(3\ ;\ 0)$ và điểm có toạ độ $(0\ ;\ 4)$ thuộc elip;

b) Vẽ hypebol biết phương trình chính tắc $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{25} = 1$;

c) Vẽ parabol tại các giá trị $p = 2$, $p = 3$.

Hướng dẫn

a) Nhập lệnh: Elip((–3,0),(3,0),(0,4)) vào ô nhập lệnh rồi bấm enter.

b) Nhập phương trình $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{25} = 1$ vào ô nhập lệnh: x^2 / 16 – y^2 / 25 = 1 (hoặc sử dụng bàn phím ảo có công thức toán để nhập) và bấm enter.

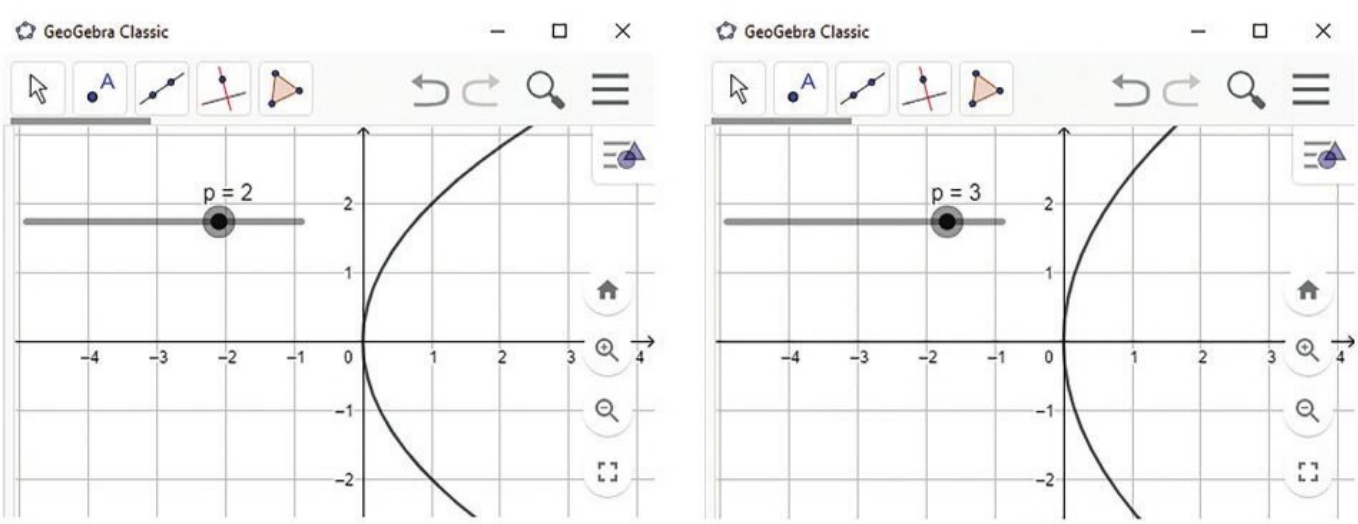
c) Tạo thanh trượt p, sau đó nhập phương trình parabol: y^2=2px. Dịch chuyển thanh trượt p vào các giá trị 2; 3 để nhận hình đường parabol tương ứng ở *Hình 4a* và *Hình 4b*.

2 Vẽ hình trong mỗi trường hợp:

a) Vẽ hypebol biết hai tiêu điểm $F_1(-5\ ;\ 0)$, $F_2(5\ ;\ 0)$ và điểm $(3\ ;\ 0)$ thuộc hypebol;

b) Vẽ parabol biết phương trình chính tắc: $y^2 = 5x$;

c) Vẽ elip tại các giá trị $a = 3$, $b = 1$ và $a = 6$, $b = 3{,}5$.



a) *b)*

Hình 4

3. Vẽ biểu đồ và tính các số đặc trưng đo xu thế trung tâm, đo mức độ phân tán cho mẫu số liệu không ghép nhóm

a) Giới thiệu công cụ cơ bản

Hiển thị Spreadsheet: Tạo bảng để nhập dữ liệu (Nháy chuột vào biểu tượng rồi chọn ⋮ để xuất hiện công cụ cần dùng).

: Phân tích thống kê.

b) Thực hành

Ví dụ 3 Nhiệt độ (đơn vị: ^{o}C) ở Thành phố Hồ Chí Minh ngày 03/6/2021 sau tám lần đo là:

27 26 28 32 34 35 30 28

Vẽ biểu đồ cột mô tả tần số và tìm số trung bình cộng, trung vị, tứ phân vị, phương sai, độ lệch chuẩn của mẫu số liệu trên.

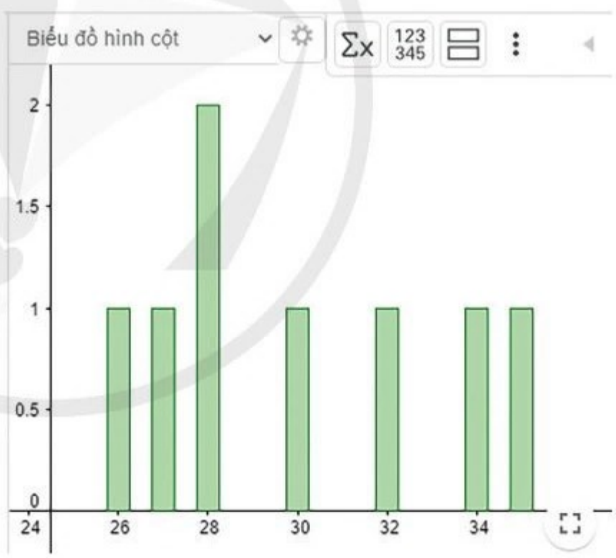
Bước 1. Nháy chuột vào Hiển thị Spreadsheet để hiển thị bảng.

Bước 2. Nhập dữ liệu vào cột A của bảng như *Hình 5*.

	A	B
1	27	
2	26	
3	28	
4	32	
5	34	
6	35	
7	30	
8	28	

Hình 5

Bước 3. Chọn bảng dữ liệu: Nháy chuột chọn cột A. Chọn , rồi nhấn vào Phân tích 1 biến. Khi đó màn hình xuất hiện biểu đồ như *Hình 6*.



Hình 6

Bước 4. Nháy chuột vào Σx ta nhận được bảng như *Hình 7*.

n	8
Trung bình	30
σ	3.1225
s	3.3381
Σx	240
Σx²	7278
GTNN	26
Q1	27.5
Trung vị	29
Q3	33
GTLN	35

Hình 7

Từ đó ta đọc được các kết quả:

Số trung bình cộng (Trung bình) là 30.

Độ lệch chuẩn (σ) là 3,1225.

Tứ phân vị là: $Q_1 = 27,5$; $Q_2 = 29$; $Q_3 = 33$.

BẢNG GIẢI THÍCH THUẬT NGỮ

THUẬT NGỮ	GIẢI THÍCH	TRANG
biến cố	một tập con của không gian mẫu	47
chỉnh hợp chập k của n phần tử ($k \in \mathbb{N}, 0 < k \leq n$)	mỗi kết quả của việc lấy k phần tử từ n phần tử của một tập hợp và sắp xếp chúng theo một thứ tự nào đó	12
hoán vị của n phần tử	mỗi kết quả của sự sắp xếp n phần tử của một tập hợp	11
không gian mẫu của phép thử	tập hợp tất cả các kết quả có thể có của phép thử đó	46
công thức nhị thức Newton	công thức khai triển tổng quát của biểu thức $(a + b)^n$	18
phép thử ngẫu nhiên	một thí nghiệm mà ta không đoán trước được kết quả nhưng xác định được tập hợp tất cả các kết quả có thể có của thí nghiệm đó	46
phương trình đường tròn	phương trình có dạng $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$ $(R > 0)$	88
phương trình chính tắc của elip	phương trình có dạng $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ $(a > b > 0)$	94
phương trình chính tắc của hypebol	phương trình có dạng $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ $(a > 0, b > 0)$	97
phương trình chính tắc của parabol	phương trình có dạng $y^2 = 2px$ $(p > 0)$	100
phương trình tổng quát của đường thẳng	phương trình có dạng $ax + by + c = 0$ $(a^2 + b^2 \neq 0)$	76
sai số tuyệt đối của số gần đúng	giá trị tuyệt đối của hiệu giữa số đúng $\overline{a}$ và số gần đúng a: $\Delta_a = \lvert\overline{a} - a\rvert$	22
sai số tương đối của số gần đúng	tỉ số giữa sai số tuyệt đối và giá trị tuyệt đối của số gần đúng a: $\delta_a = \frac{\Delta a}{\lvert a\rvert}$	24
sơ đồ hình cây	sơ đồ bắt đầu tại một nút duy nhất với các nhánh toả ra các nút bổ sung	6
toạ độ của vectơ $\vec{u}$	toạ độ của điểm M sao cho $\overrightarrow{OM} = \vec{u}$ với O là gốc toạ độ	62
tổ hợp chập k của n phần tử ($k \in \mathbb{N}, 0 \leq k \leq n$)	mỗi tập con gồm k phần tử lấy từ n phần tử của một tập hợp	15

BẢNG TRA CỨU TỪ NGỮ

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC SƯ PHẠM
Địa chỉ: Tầng 6, Toà nhà số 128 đường Xuân Thuỷ, quận Cầu Giấy, TP. Hà Nội
Điện thoại: 024.37547735
Email: nxb@hnue.edu.vn | **Website:** www.nxbdhsp.edu.vn

Chịu trách nhiệm xuất bản:
Giám đốc: NGUYỄN BÁ CƯỜNG
Chịu trách nhiệm nội dung:
Tổng biên tập: ĐỖ VIỆT HÙNG

Chịu trách nhiệm tổ chức bản thảo và bản quyền nội dung:
CÔNG TY CỔ PHẦN ĐẦU TƯ XUẤT BẢN – THIẾT BỊ GIÁO DỤC VIỆT NAM
Chủ tịch Hội đồng Quản trị: NGƯT NGÔ TRẦN ÁI
Tổng Giám đốc: VŨ BÁ KHÁNH

Biên tập:
TẠ THỊ ÁNH – NGUYỄN THỊ NGÂN – ĐÀO ANH TIẾN
Thiết kế sách:
NGUYỄN THỊ PHƯƠNG YÊN
Trình bày bìa:
PHAN THỊ LƯƠNG
Sửa bản in:
LÊ TRUNG DŨNG – VŨ MẠNH HUY

TOÁN 10 - TẬP HAI

Mã số:
ISBN: ....
In .... cuốn, khổ 19 x 26,5cm, tại ......
Địa chỉ: ....
Số xác nhận đăng kí xuất bản: ...-.../... /...-.../...
Quyết định xuất bản số: .... /....-... ngày ... /... /....
In xong và nộp lưu chiểu

Mang cuộc sống vào bài học
Đưa bài học vào cuộc sống

Toán 10 là cuốn sách giáo khoa dành cho học sinh lớp 10, thuộc bộ sách giáo khoa "Cánh Diều", thực hiện theo "Chương trình Giáo dục phổ thông 2018".

Sách gồm hai tập và chuyên đề học tập được biên soạn đáp ứng yêu cầu phát triển phẩm chất và năng lực của học sinh. Các hoạt động học tập được tổ chức theo tiến trình từ dễ đến khó, hướng đến việc khám phá, phát hiện, thực hành, vận dụng giải quyết vấn đề trong thực tiễn, phù hợp với trình độ nhận thức của học sinh. Sách được trình bày hấp dẫn, khơi gợi sự tò mò, kích thích hứng thú, tạo dựng niềm tin trong học tập môn Toán ở học sinh.

Sách là sản phẩm tâm huyết của tập thể tác giả – những nhà giáo, nhà khoa học giàu kinh nghiệm trong giáo dục phổ thông.