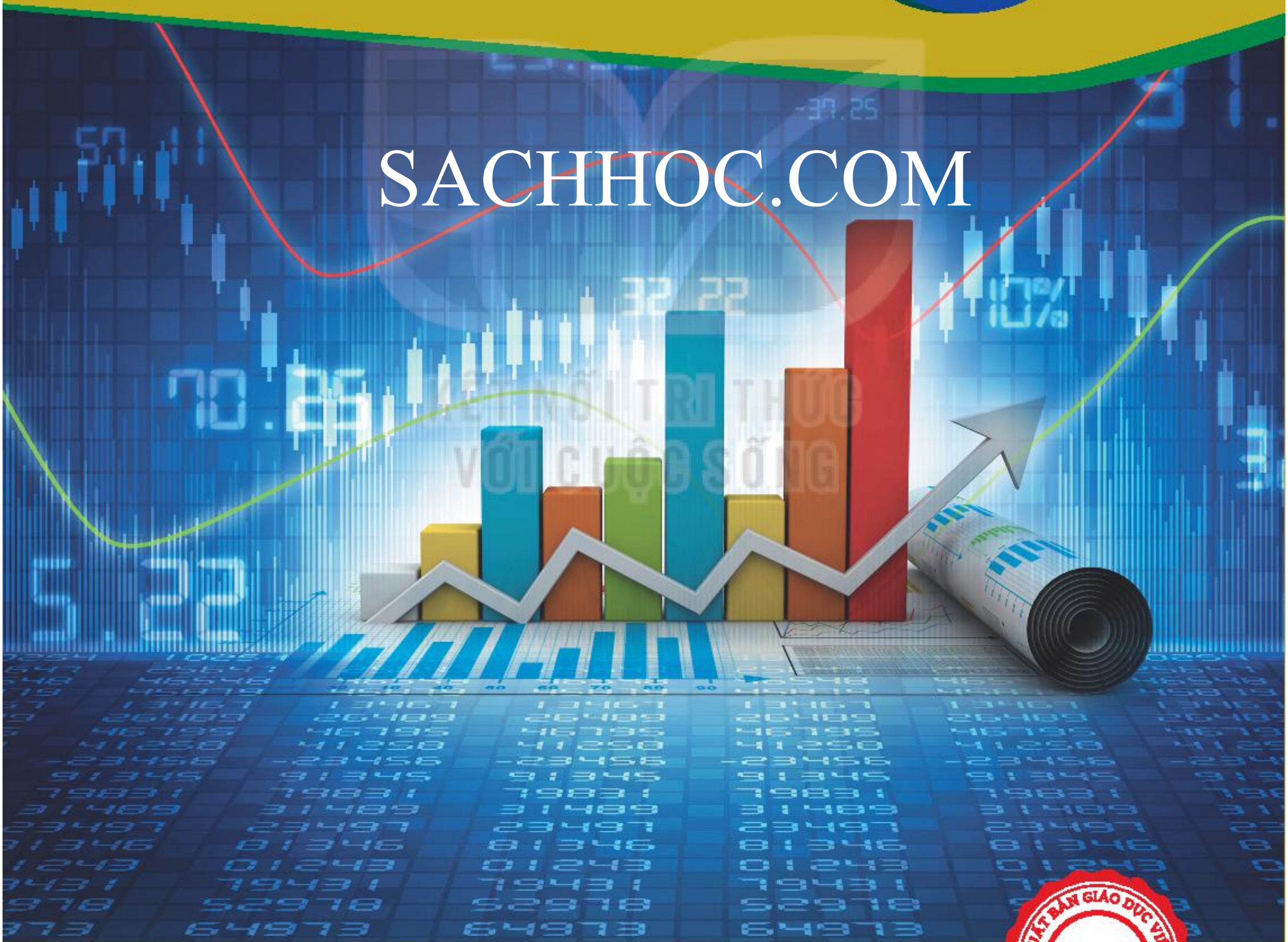
KẾT NỐI TRI THỨC
VỚI CUỘC SỐNG

HÀ HUY KHOÁI (Tổng Chủ biên)
CUNG THẾ ANH – TRẦN VĂN TẤN – ĐẶNG HÙNG THẮNG (đồng Chủ biên)
HẠ VŨ ANH – TRẦN MẠNH CƯỜNG – PHAN THỊ HÀ DƯƠNG – NGUYỄN ĐẠT ĐĂNG
PHẠM HOÀNG HÀ – ĐẶNG ĐÌNH HANH – PHAN THANH HỒNG
NGUYỄN THỊ KIM SƠN – DƯƠNG ANH TUẤN – NGUYỄN CHU GIA VƯỢNG

TOÁN 10

TẬP MỘT



NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM

HÀ HUY KHOÁI (Tổng Chủ biên)
CUNG THẾ ANH – TRẦN VĂN TẤN – ĐẶNG HÙNG THẮNG (đồng Chủ biên)
HẠ VŨ ANH – TRẦN MẠNH CƯỜNG – PHAN THỊ HÀ DƯƠNG – NGUYỄN ĐẠT ĐĂNG
PHẠM HOÀNG HÀ – ĐẶNG ĐÌNH HẠNH – PHAN THANH HỒNG – NGUYỄN THỊ KIM SƠN
DƯƠNG ANH TUẤN – NGUYỄN CHU GIA VƯỢNG

TOÁN

10

TẬP MỘT

KẾT NỐI TRI THỨC
VỚI CUỘC SỐNG

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM

HƯỚNG DẪN SỬ DỤNG SÁCH

1. Mỗi bài học đều được thiết kế theo cấu trúc gồm những phần sau đây.

   Thuật ngữ: Điểm tên các đối tượng chính của bài học.

   Kiến thức, kĩ năng: Giúp em xác định những nội dung kiến thức, kĩ năng chính cần lĩnh hội và rèn luyện trong bài học.

   Mở đầu: Đưa ra tình huống làm nảy sinh nhu cầu học tập; nó có thể là một bài toán thực tế đại diện, hay là một đoạn dẫn nhập. Em không cần trả lời ngay các câu hỏi hay yêu cầu được đặt ra ở phần này, mà sẽ giải quyết chúng trong bài học, sau khi đã lĩnh hội được lượng tri thức và kĩ năng cần thiết.

   Mục kiến thức: Sau phần mở đầu, bài học được chia thành các mục theo từng chủ đề. Nhìn chung, mỗi đơn vị kiến thức có cấu trúc sau đây:

   > **Hình thành kiến thức:** Em cần tích cực tham gia vào các hoạt động (**HĐ**) để chiếm lĩnh tri thức. Các **HĐ** này cho em cơ hội quan sát và trải nghiệm, tính toán và lập luận để đi tới khung kiến thức một cách tự nhiên.
   >
   > **Ví dụ:** Em có thể học ở đây phương pháp, cách lập luận và tính toán, cách trình bày lời giải bài toán.
   >
   > **Luyện tập:** Vận dụng kiến thức đã học, tham khảo ví dụ tương ứng, em hãy luyện tập để củng cố kiến thức và rèn luyện kĩ năng.
   >
   > **Vận dụng:** Trên nền tảng kiến thức và kĩ năng đã được học, em giải quyết các bài toán gắn với thực tế, kết nối tri thức với các lĩnh vực khác nhau trong học tập, khoa học và cuộc sống.

   Em có thể bắt gặp một khung chữ nhằm hỗ trợ hoặc bình luận,... cho nội dung tương ứng được đề cập ở bên cạnh.

   Ngoài bốn thành phần cơ bản ở trên, trong một đơn vị kiến thức, em còn có thể có cơ hội tham gia vào ***Khám phá***, ***Trải nghiệm***, ***Thảo luận***, trả lời ?, mở rộng hiểu biết cùng ***Em có biết?***,...

   Bài tập: Em chủ động thực hiện ngoài giờ trên lớp, tuy vậy, thầy/cô sẽ dành thời lượng nhất định để cùng em điểm qua các bài tập này.

2. Các bảng tra cứu và giải thích thuật ngữ (được đặt ở cuối sách) cung cấp địa chỉ tra cứu và giải thích một số khái niệm, công thức được phát biểu trong sách.

Hãy bảo quản, giữ gìn sách giáo khoa
để dành tặng các em học sinh lớp sau!

LỜI NÓI ĐẦU

Các em học sinh yêu quý!

Trên tay các em là cuốn *TOÁN 10* của bộ sách "Kết nối tri thức với cuộc sống". Đúng như tên gọi của bộ sách, các kiến thức trình bày ở đây đều xuất phát từ những tình huống của cuộc sống quanh ta và trở lại giúp ta giải quyết những vấn đề của cuộc sống. Vì thế, khi học Toán theo cuốn sách này, các em sẽ cảm nhận được rằng, Toán học thật là gần gũi.

Đoạn mở đầu của các chương, các bài học thường đưa ra những tình huống, những ví dụ thực tế cho thấy sự cần thiết phải đưa đến những khái niệm toán học mới. Qua đó, các em sẽ được trau dồi những kĩ năng cần thiết cho một công dân trong thời hiện đại, đó là khả năng "mô hình hoá". Khi đã đưa vấn đề thực tiễn về bài toán (mô hình toán học), chúng ta sẽ phát hiện thêm những kiến thức toán học mới, để cùng với những kiến thức đã biết giải quyết bài toán thực tiễn đặt ra.

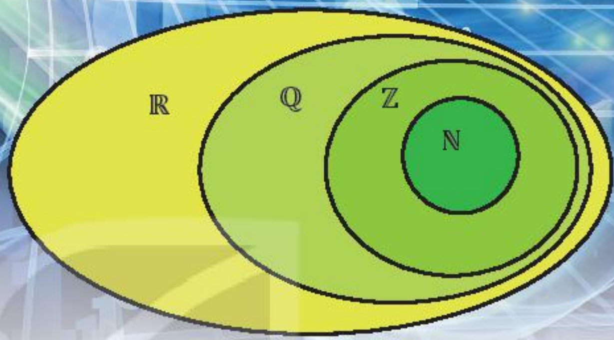
Hi vọng rằng, qua mỗi bài học, mỗi chương sách, qua mỗi vòng lặp từ thực tiễn đến tri thức toán học, rồi từ tri thức toán học quay về thực tiễn, *TOÁN 10* sẽ giúp các em trưởng thành nhanh chóng và trở thành người bạn thân thiết của các em.

Chúc các em thành công cùng *TOÁN 10*!

MỤC LỤC

CHƯƠNG I
MỆNH ĐỀ VÀ TẬP HỢP

Chương này cung cấp những khái niệm và kí hiệu lôgic thường dùng, củng cố và mở rộng hiểu biết ban đầu về lí thuyết tập hợp đã được học ở các lớp dưới. Từ đó góp phần hình thành khả năng suy luận có lí, khả năng tiếp nhận, diễn đạt các vấn đề một cách chính xác, tạo cơ sở để học tốt các nội dung toán học khác.



Bài 1 MỆNH ĐỀ

THUẬT NGỮ

- Mệnh đề
- Mệnh đề phủ định
- Mệnh đề kéo theo, mệnh đề đảo
- Mệnh đề tương đương
- Điều kiện cần, điều kiện đủ, điều kiện cần và đủ
- Các kí hiệu: ∀, ∃

KIẾN THỨC, KĨ NĂNG

- Thiết lập và phát biểu mệnh đề phủ định, mệnh đề đảo, mệnh đề kéo theo, mệnh đề tương đương.
- Thiết lập và phát biểu các mệnh đề có chứa kí hiệu ∀, ∃.
- Xác định tính đúng sai của một mệnh đề trong những trường hợp đơn giản.

Có bao nhiêu con vật xuất hiện trong hình vẽ?

Có 5 con vật xuất hiện trong hình vẽ.

An

Có 6 con vật xuất hiện trong hình vẽ.

Khoa

1. MỆNH ĐỀ, MỆNH ĐỀ CHỨA BIẾN

a. Mệnh đề

HĐ1. Trong các câu ở *tình huống mở đầu*:

a) Câu nào đúng?

b) Câu nào sai?

c) Câu nào không xác định được tính đúng sai?

Những câu nói của An và Khoa là những khẳng định có tính đúng hoặc sai. Người ta gọi mỗi câu như vậy là một mệnh đề lôgic (gọi tắt là mệnh đề). Những câu không xác định được tính đúng sai không phải là mệnh đề.

> Mỗi mệnh đề phải hoặc đúng hoặc sai.
>
> Một mệnh đề không thể vừa đúng vừa sai.

Chú ý. Người ta thường sử dụng các chữ cái P, Q, R,... để biểu thị các mệnh đề.

Ví dụ 1. Trong các câu sau, câu nào là mệnh đề? Câu nào không phải là mệnh đề?

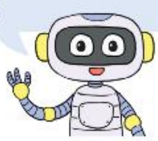
a) Phương trình $3x^2 - 5x + 2 = 0$ có nghiệm nguyên;

b) $5 < 7 - 3$;

c) Có bao nhiêu dấu hiệu nhận biết hai tam giác đồng dạng?

d) Đấy là cách xử lí khôn ngoan!

Thông thường, những câu nghi vấn, câu cảm thán, câu cầu khiến không phải là mệnh đề.



Giải

Vì phương trình $3x^2 - 5x + 2 = 0$ có nghiệm nguyên $x = 1$ nên câu a là đúng. Câu b là sai. Do đó, câu a và câu b là những mệnh đề.

Câu c là câu hỏi; câu d là câu cảm thán, nêu lên ý kiến của người nói. Do đó, không xác định được tính đúng sai. Vậy các câu c và d không phải là mệnh đề.

Chú ý. Những mệnh đề liên quan đến toán học (các mệnh đề ở câu a và câu b trong Ví dụ 1) được gọi là mệnh đề toán học.

Luyện tập 1. Thay dấu "?" bằng dấu "x" vào ô thích hợp trong bảng sau:

Câu	Không phải mệnh đề	Mệnh đề đúng	Mệnh đề sai
13 là số nguyên tố.	?	?	?
Tổng độ dài hai cạnh bất kì của một tam giác nhỏ hơn độ dài cạnh còn lại.	?	?	?
Bạn đã làm bài tập chưa?	?	?	?
Thời tiết hôm nay thật đẹp!	?	?	?

b. Mệnh đề chứa biến

Xét câu “n chia hết cho 2” (với n là số tự nhiên).

Ta chưa khẳng định được tính đúng sai của câu này, do đó nó chưa phải là một mệnh đề.

Tuy nhiên, nếu thay n bằng số tự nhiên cụ thể thì câu này cho ta một mệnh đề. Chẳng hạn:

- Với $n = 5$ ta được mệnh đề “5 chia hết cho 2”. Đây là mệnh đề sai.
- Với $n = 10$ ta được mệnh đề “10 chia hết cho 2”. Đây là mệnh đề đúng.

Ta nói rằng câu “n chia hết cho 2” là một mệnh đề chứa biến.

❓ Xét câu “$x > 5$”. Hãy tìm hai giá trị thực của x để từ câu đã cho, ta nhận được một mệnh đề đúng và một mệnh đề sai.

2. MỆNH ĐỀ PHỦ ĐỊNH

HĐ2. Quan sát biển báo trong hình bên.

Khoa nói: “Đây là biển báo đường dành cho người đi bộ”.

An không đồng ý với ý kiến của Khoa.

Hãy phát biểu ý kiến của An dưới dạng một mệnh đề.

Để phủ định một mệnh đề P, người ta thường thêm (hoặc bớt) từ “không” hoặc “không phải” vào trước vị ngữ của mệnh đề P. Ta kí hiệu mệnh đề phủ định của mệnh đề P là $\overline{P}$.

> Mệnh đề P và mệnh đề $\overline{P}$ là hai phát biểu trái ngược nhau. Nếu P đúng thì $\overline{P}$ sai, còn nếu P sai thì $\overline{P}$ đúng.

Ví dụ 2. Phát biểu mệnh đề phủ định của mỗi mệnh đề sau:

P: “17 là số chính phương”;

Q: “Hình hộp không phải là hình lăng trụ”.

Giải

Mệnh đề phủ định của P là $\overline{P}$: “17 không phải là số chính phương”.

Mệnh đề phủ định của Q là $\overline{Q}$: “Hình hộp là hình lăng trụ”.

Luyện tập 2. Phát biểu mệnh đề phủ định của mỗi mệnh đề sau và xác định tính đúng sai của mệnh đề phủ định đó.

P: “2 022 chia hết cho 5”;

Q: “Bất phương trình $2x + 1 > 0$ có nghiệm”.

Vận dụng. Cho mệnh đề Q: “Châu Á là châu lục có diện tích lớn nhất trên thế giới”. Phát biểu mệnh đề phủ định $\overline{Q}$ và xác định tính đúng sai của hai mệnh đề Q và $\overline{Q}$.

3. MỆNH ĐỀ KÉO THEO, MỆNH ĐỀ ĐẢO

a. Mệnh đề kéo theo

HĐ3. Cặp từ quan hệ nào sau đây phù hợp với vị trí bị che khuất trong câu ghép ở hình bên?

A. Nếu … thì …

B. Tuy … nhưng …

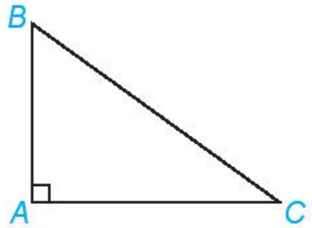
sử dụng rượu bia khi tham gia giao thông có thể bị xử phạt hành chính hoặc xử lí hình sự tuỳ theo mức độ vi phạm.

HĐ4. Cho hai câu sau:

P: "Tam giác ABC là tam giác vuông tại A";

Q: "Tam giác ABC có $AB^2 + AC^2 = BC^2$".

Hãy phát biểu câu ghép có dạng "Nếu P thì Q".



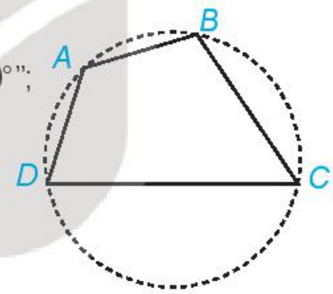
> Mệnh đề "Nếu P thì Q" được gọi là một **mệnh đề kéo theo** và kí hiệu là $P \Rightarrow Q$.

Ví dụ 3. Cho tứ giác $ABCD$, xét hai câu sau:

P: "Tứ giác $ABCD$ có tổng số đo hai góc đối diện bằng $180°$";

Q: "$ABCD$ là tứ giác nội tiếp đường tròn".

Phát biểu mệnh đề $P \Rightarrow Q$ và cho biết tính đúng sai của mệnh đề đó.



Giải

$P \Rightarrow Q$: "Nếu tứ giác $ABCD$ có tổng số đo hai góc đối diện bằng $180°$ thì $ABCD$ là tứ giác nội tiếp đường tròn".

Mệnh đề kéo theo này là mệnh đề đúng.

Các định lí toán học là những mệnh đề đúng và thường có dạng $P \Rightarrow Q$. Khi đó ta nói:

> P là giả thiết của định lí, Q là kết luận của định lí, hoặc
> "P là **điều kiện đủ** để có Q" hoặc "Q là **điều kiện cần** để có P".

b. Mệnh đề đảo

HĐ5. Xét hai câu sau:

P: "Phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c = 0$ có hai nghiệm phân biệt";

Q: "Phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c = 0$ có biệt thức $\Delta = b^2 - 4ac > 0$".

a) Hãy phát biểu mệnh đề $P \Rightarrow Q$.

b) Hãy phát biểu mệnh đề $Q \Rightarrow P$.

Mệnh đề $Q \Rightarrow P$ được gọi là mệnh đề đảo của mệnh đề $P \Rightarrow Q$.

Nhận xét. Mệnh đề đảo của một mệnh đề đúng không nhất thiết là đúng.

Ví dụ 4. Hãy phát biểu mệnh đề đảo của mệnh đề: "Nếu tam giác ABC là tam giác đều thì tam giác ABC là tam giác cân" và xác định tính đúng sai của mệnh đề đảo này.

Giải

Mệnh đề đảo là: "Nếu tam giác ABC là tam giác cân thì tam giác ABC là tam giác đều".

Mệnh đề đảo này là sai.

Luyện tập 3. Cho các mệnh đề P: "a và b chia hết cho c";

Q: "$a + b$ chia hết cho c".

a) Hãy phát biểu định lí $P \Rightarrow Q$. Nêu giả thiết, kết luận của định lí và phát biểu định lí này dưới dạng điều kiện cần, điều kiện đủ.

b) Hãy phát biểu mệnh đề đảo của mệnh đề $P \Rightarrow Q$ rồi xác định tính đúng sai của mệnh đề đảo này.

4. MỆNH ĐỀ TƯƠNG ĐƯƠNG

HĐ6. Hãy xác định tính đúng sai của mệnh đề sau:

"Một số tự nhiên chia hết cho 5 nếu số đó có chữ số tận cùng bằng 0 hoặc 5 và ngược lại".

Mệnh đề ở HĐ6 có thể phát biểu dưới dạng: "Một số tự nhiên chia hết cho 5 nếu và chỉ nếu số đó có chữ số tận cùng bằng 0 hoặc 5".

Mệnh đề "P nếu và chỉ nếu Q" được gọi là một mệnh đề tương đương và kí hiệu là $P \Leftrightarrow Q$.

Nhận xét. Nếu cả hai mệnh đề $P \Rightarrow Q$ và $Q \Rightarrow P$ đều đúng thì mệnh đề tương đương $P \Leftrightarrow Q$ đúng. Khi đó ta nói "P tương đương với Q" hoặc "P là điều kiện cần và đủ để có Q" hoặc "P khi và chỉ khi Q".

Ví dụ 5. Cho hai mệnh đề:

P: "Tứ giác $ABCD$ là hình vuông";

Q: "Tứ giác $ABCD$ là hình chữ nhật có hai đường chéo vuông góc với nhau".

Hãy phát biểu mệnh đề tương đương $P \Leftrightarrow Q$ và xác định tính đúng sai của mệnh đề tương đương này.

Giải

Mệnh đề tương đương $P \Leftrightarrow Q$: "Tứ giác $ABCD$ là hình vuông khi và chỉ khi tứ giác $ABCD$ là hình chữ nhật có hai đường chéo vuông góc với nhau". Mệnh đề tương đương này đúng vì cả hai mệnh đề $P \Rightarrow Q$ và $Q \Rightarrow P$ đều đúng.

Luyện tập 4. Phát biểu điều kiện cần và đủ để số tự nhiên n chia hết cho 2.

5. MỆNH ĐỀ CÓ CHỨA KÍ HIỆU ∀, ∃

- Câu "Mọi số thực đều có bình phương không âm" là một mệnh đề. Có thể viết mệnh đề này như sau:

$$P: \text{"}\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geq 0\text{"}.$$

- Câu "Có một số hữu tỉ mà bình phương của nó bằng 2" là một mệnh đề. Có thể viết mệnh đề này như sau:

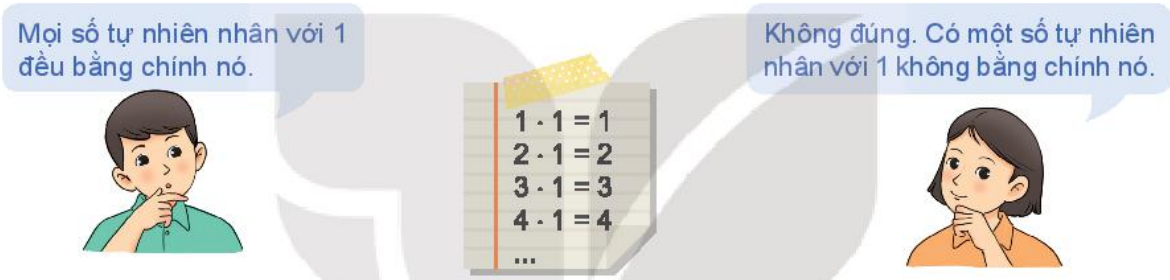
$$Q: \text{"}\exists x \in \mathbb{Q}, x^2 = 2\text{"}.$$

? Em hãy xác định tính đúng sai của hai mệnh đề trên.

Luyện tập 5. Phát biểu bằng lời mệnh đề sau và cho biết mệnh đề đó đúng hay sai.

$$\forall x \in \mathbb{R}, x^2 + 1 \leq 0.$$

Dưới đây ta xét mệnh đề phủ định của mệnh đề có chứa kí hiệu ∀, ∃.



Mệnh đề "Có một số tự nhiên nhân với 1 không bằng chính nó" là phủ định của mệnh đề "Mọi số tự nhiên nhân với 1 đều bằng chính nó".

Như vậy mệnh đề phủ định của P: "$\forall n \in \mathbb{N}, n \cdot 1 = n$" là mệnh đề $\overline{P}$: "$\exists n \in \mathbb{N}, n \cdot 1 \neq n$".

Ví dụ 6

Viết mệnh đề phủ định của mệnh đề sau và xác định tính đúng sai của nó.

$$P: \text{"}\exists x \in \mathbb{R}, x^2 + 1 = 0\text{"}.$$

Giải

Mệnh đề P có thể phát biểu là: "Tồn tại một số thực mà bình phương của nó cộng với 1 bằng 0".
Phủ định của mệnh đề P là: "Không tồn tại một số thực mà bình phương của nó cộng với 1 bằng 0", tức là: "Mọi số thực đều có bình phương cộng với 1 khác 0".

Ta có thể viết mệnh đề phủ định của P là $\overline{P}$: "$\forall x \in \mathbb{R}, x^2 + 1 \neq 0$". Mệnh đề phủ định này đúng.

Luyện tập 6

Trong tiết học môn Toán, Nam phát biểu: "Mọi số thực đều có bình phương khác 1".

Mai phát biểu: "Có một số thực mà bình phương của nó bằng 1".

a) Hãy cho biết bạn nào phát biểu đúng.

b) Dùng kí hiệu ∀, ∃ để viết lại các phát biểu của Nam và Mai dưới dạng mệnh đề.

BÀI TẬP

1.1. Trong các câu sau, câu nào là mệnh đề?

a) Trung Quốc là nước đông dân nhất thế giới;

b) Bạn học trường nào?

c) Không được làm việc riêng trong giờ học;

d) Tôi sẽ sút bóng trúng xà ngang.

1.2. Xác định tính đúng sai của mỗi mệnh đề sau:

a) $\pi < \frac{10}{3}$;

b) Phương trình $3x + 7 = 0$ có nghiệm;

c) Có ít nhất một số cộng với chính nó bằng 0;

d) 2 022 là hợp số.

1.3. Cho hai câu sau:

P: "Tam giác ABC là tam giác vuông";

Q: "Tam giác ABC có một góc bằng tổng hai góc còn lại".

Hãy phát biểu mệnh đề tương đương $P \Leftrightarrow Q$ và xác định tính đúng sai của mệnh đề này.

1.4. Phát biểu mệnh đề đảo của mỗi mệnh đề sau và xác định tính đúng sai của chúng.

P: "Nếu số tự nhiên n có chữ số tận cùng là 5 thì n chia hết cho 5";

Q: "Nếu tứ giác $ABCD$ là hình chữ nhật thì tứ giác $ABCD$ có hai đường chéo bằng nhau".

1.5. Với hai số thực a và b, xét các mệnh đề P: "$a^2 < b^2$" và Q: "$0 < a < b$".

a) Hãy phát biểu mệnh đề $P \Rightarrow Q$.

b) Hãy phát biểu mệnh đề đảo của mệnh đề ở câu a.

c) Xác định tính đúng sai của mỗi mệnh đề ở câu a và câu b.

1.6. Xác định tính đúng sai của mệnh đề sau và tìm mệnh đề phủ định của nó.

Q: "$\exists\, n \in \mathbb{N}$, n chia hết cho $n + 1$".

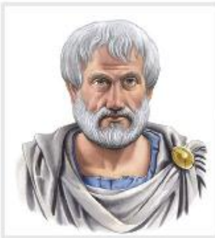
1.7. Dùng kí hiệu $\forall$, $\exists$ để viết các mệnh đề sau:

P: "Mọi số tự nhiên đều có bình phương lớn hơn hoặc bằng chính nó";

Q: "Có một số thực cộng với chính nó bằng 0".

Em có biết?

Lôgic mệnh đề lần đầu tiên được phát triển một cách có hệ thống bởi nhà triết học Hy Lạp Aristotle hơn 2 300 năm trước và được thảo luận bởi nhà toán học người Anh George Boole vào năm 1854 trong cuốn sách "The Laws of Think".



Aristotle

George Boole

Bài 2 TẬP HỢP VÀ CÁC PHÉP TOÁN TRÊN TẬP HỢP

THUẬT NGỮ

- Tập hợp, tập con, tập hợp bằng nhau, tập rỗng
- Hợp, giao, hiệu của hai tập hợp, phần bù của một tập con
- Biểu đồ Ven

KIẾN THỨC, KĨ NĂNG

- Nhận biết các khái niệm cơ bản về tập hợp.
- Thực hiện các phép toán trên tập hợp và vận dụng giải một số bài toán có nội dung thực tiễn.
- Sử dụng biểu đồ Ven để biểu diễn tập hợp và các phép toán trên tập hợp.

Câu lạc bộ Lịch sử có 12 thành viên (không có hai bạn nào trùng tên), tổ chức hai chuyên đề trên một phần mềm họp trực tuyến. Tên các thành viên tham gia mỗi chuyên đề được hiển thị trên màn hình (H.1.1).

Hình 1.1

Bài học này sẽ giúp em trả lời câu hỏi trên bằng kiến thức cơ bản về tập hợp và các phép toán trên tập hợp.

1. CÁC KHÁI NIỆM CƠ BẢN VỀ TẬP HỢP

a. Tập hợp

HĐ1. Trong tình huống trên, gọi A là tập hợp những thành viên tham gia Chuyên đề 1, B là tập hợp những thành viên tham gia Chuyên đề 2.

a) Nam có là một phần tử của tập hợp A không? Ngân có là một phần tử của tập hợp B không?

b) Hãy mô tả các tập hợp A và B bằng cách liệt kê các phần tử.

HĐ2. Cho tập hợp:

C = {châu Á; châu Âu; châu Đại Dương; châu Mĩ; châu Nam Cực; châu Phi}.

a) Hãy chỉ ra tính chất đặc trưng cho các phần tử của tập hợp C.

b) Tập hợp C có bao nhiêu phần tử?

Có thể mô tả một tập hợp bằng một trong hai cách sau:
Cách 1. Liệt kê các phần tử của tập hợp;
Cách 2. Chỉ ra tính chất đặc trưng cho các phần tử của tập hợp.

$a \in S$: phần tử a thuộc tập hợp S.
$a \notin S$: phần tử a không thuộc tập hợp S.

Ví dụ 1. Cho $D = \{n \in \mathbb{N} \mid n$ là số nguyên tố, $5 < n < 20\}$.

a) Dùng kí hiệu $\in$, $\notin$ để viết câu trả lời cho câu hỏi sau: Trong các số 5; 12; 17; 18, số nào thuộc tập D, số nào không thuộc tập D?

b) Viết tập hợp D bằng cách liệt kê các phần tử. Tập hợp D có bao nhiêu phần tử?

Giải

a) $5 \notin D$; $12 \notin D$; $17 \in D$; $18 \notin D$.

b) $D = \{7; 11; 13; 17; 19\}$. Tập hợp D có 5 phần tử.

Chú ý. Số phần tử của tập hợp S được kí hiệu là $n(S)$. Chẳng hạn, tập hợp A trong HĐ1 có số phần tử là 7, ta viết $n(A) = 7$.

Tập hợp không chứa phần tử nào được gọi là tập rỗng, kí hiệu là $\varnothing$.

Chẳng hạn:

– Tập hợp các nghiệm của phương trình $x^2 + 1 = 0$ là tập rỗng;

– Tập hợp những người sống trên Mặt Trời là tập rỗng.

Luyện tập 1. Gọi X là tập nghiệm của phương trình

$$x^2 - 24x + 143 = 0.$$

Các mệnh đề sau đúng hay sai?

a) $13 \in X$; b) $11 \notin X$; c) $n(X) = 2$.

b. Tập hợp con

HĐ3. Gọi H là tập hợp các bạn tham gia Chuyên đề 2 trong *tình huống mở đầu* có tên bắt đầu bằng chữ H. Các phần tử của tập hợp H có là phần tử của tập hợp B trong HĐ1 không?

Nếu mọi phần tử của tập hợp T đều là phần tử của tập hợp S thì ta nói T là một tập hợp con (tập con) của S và viết là $T \subset S$ (đọc là T chứa trong S hoặc T là tập con của S).

- Thay cho $T \subset S$, ta còn viết $S \supset T$ (đọc là S chứa T).
- Kí hiệu $T \not\subset S$ để chỉ T không là tập con của S.

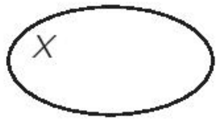
Nhận xét

- Từ định nghĩa trên, T là tập con của S nếu mệnh đề sau đúng:

$$\forall x, x \in T \Rightarrow x \in S.$$

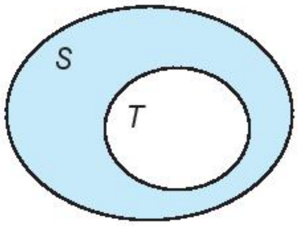
- Quy ước tập rỗng là tập con của mọi tập hợp.

Người ta thường minh hoạ một tập hợp bằng một hình phẳng được bao quanh bởi một đường kín, gọi là biểu đồ Ven (H.1.2).



Hình 1.2

Minh hoạ T là một tập con của S như Hình 1.3.



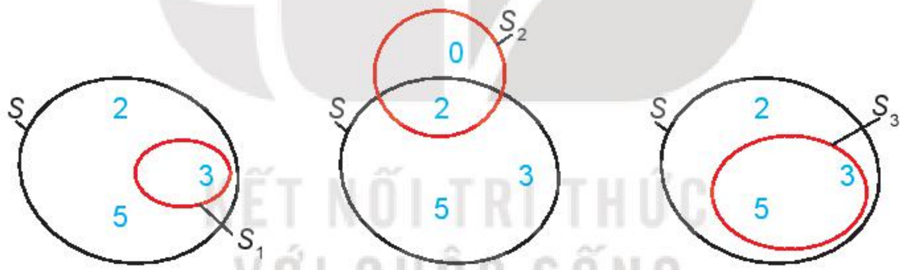
Hình 1.3

Ví dụ 2. Cho tập hợp $S = \{2; 3; 5\}$. Những tập hợp nào sau đây là tập con của S?

$S_1 = \{3\}$; $S_2 = \{0; 2\}$; $S_3 = \{3; 5\}$.

Giải

Các tập hợp $S_1 = \{3\}$, $S_3 = \{3; 5\}$ là những tập con của S (H.1.4).



Hình 1.4

c. Hai tập hợp bằng nhau

HĐ4. Sơn và Thu viết tập hợp các số chính phương nhỏ hơn 100 như sau:

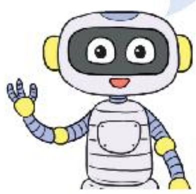
Sơn: $S = \{0; 1; 4; 9; 16; 25; 36; 49; 64; 81\}$;

Thu: $T = \{n \in \mathbb{N} \mid n$ là số chính phương; $n < 100\}$.

Hỏi bạn nào viết đúng?

Hai tập hợp S và T được gọi là hai tập hợp bằng nhau nếu mỗi phần tử của T cũng là phần tử của tập hợp S và ngược lại. Kí hiệu là $S = T$.

Nếu $S \subset T$ và $T \subset S$ thì $S = T$.



Ví dụ 3. Cho hai tập hợp:

$C = \{n \in \mathbb{N} \mid n$ là bội chung của 2 và 3; $n < 30\}$;

$D = \{n \in \mathbb{N} \mid n$ là bội của 6; $n < 30\}$.

Chứng minh $C = D$.

Giải

Ta có: $C = \{0; 6; 12; 18; 24\}$;

$D = \{0; 6; 12; 18; 24\}$.

Vậy $C = D$.

Luyện tập 2. Giả sử C là tập hợp các hình bình hành có hai đường chéo vuông góc; D là tập hợp các hình vuông.

Các mệnh đề sau đúng hay sai?

a) $C \subset D$; b) $C \supset D$; c) $C = D$.

2. CÁC TẬP HỢP SỐ

a. Mối quan hệ giữa các tập hợp số

- *Tập hợp các số tự nhiên* $\mathbb{N} = \{0; 1; 2; 3; 4;...\}$.
- *Tập hợp các số nguyên* $\mathbb{Z}$ gồm các số tự nhiên và các số nguyên âm:

$$\mathbb{Z} = \{...; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3;...\}.$$

- *Tập hợp các số hữu tỉ* $\mathbb{Q}$ gồm các số viết được dưới dạng phân số $\frac{a}{b}$, với $a, b \in \mathbb{Z}$, $b \neq 0$.

  Số hữu tỉ còn được biểu diễn dưới dạng số thập phân hữu hạn hoặc vô hạn tuần hoàn.
- *Tập hợp các số thực* $\mathbb{R}$ gồm các số hữu tỉ và các số vô tỉ. Số vô tỉ là các số thập phân vô hạn không tuần hoàn.

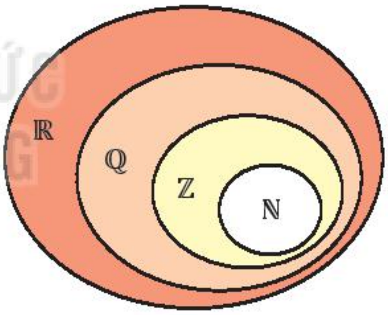
HĐ5. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

a) Mọi số nguyên đều viết được dưới dạng phân số;

b) Tập hợp các số thực chứa tập hợp các số hữu tỉ;

c) Tồn tại một số thực không là số hữu tỉ.

Mối quan hệ giữa các tập hợp số: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.



Hình 1.5

Ví dụ 4. Hãy xác định tính đúng sai của các mệnh đề sau:

a) $3{,}274 \in \mathbb{Q}$; b) $\sqrt{2} \in \mathbb{R}$; c) $\frac{3}{4} \in \mathbb{Z}$.

Giải

a) $3{,}274 \in \mathbb{Q}$ là mệnh đề đúng.

b) $\sqrt{2} \in \mathbb{R}$ là mệnh đề đúng.

c) $\frac{3}{4} \in \mathbb{Z}$ là mệnh đề sai.

Luyện tập 3. Cho tập hợp $C = \{-4; 0; 1; 2\}$. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

a) C là tập con của $\mathbb{Z}$; b) C là tập con của $\mathbb{N}$; c) C là tập con của $\mathbb{R}$.

b. Các tập con thường dùng của $\mathbb{R}$

HĐ6. Cho hai tập hợp $C = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 3\}$ và $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 3\}$.

Các mệnh đề sau đúng hay sai?

a) C, D là các tập con của $\mathbb{R}$; b) $\forall x, x \in C \Rightarrow x \in D$;

c) $3 \in C$ nhưng $3 \notin D$; d) $C = D$.

Một số tập con thường dùng của tập số thực $\mathbb{R}$:

- *Khoảng*

$(a; b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$

$(a; +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}$

$(-\infty; b) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < b\}$

$(-\infty; +\infty)$

- *Đoạn*

$[a; b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$

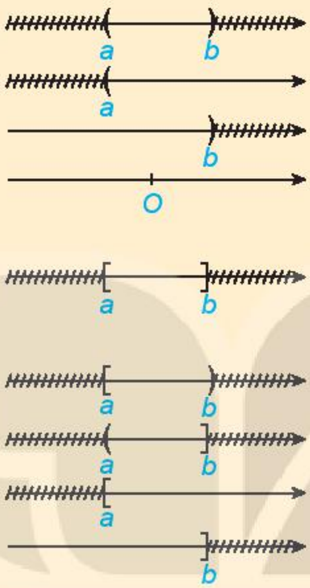
- *Nửa khoảng*

$[a; b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$

$(a; b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$

$[a; +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq a\}$

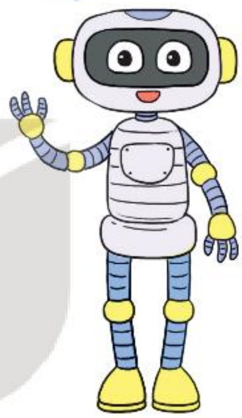
$(-\infty; b] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq b\}$



Kí hiệu $+\infty$: Đọc là dương vô cực (hoặc dương vô cùng).

Kí hiệu $-\infty$: Đọc là âm vô cực (hoặc âm vô cùng).

a, b gọi là các đầu mút của đoạn, khoảng hay nửa khoảng.

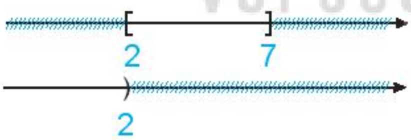


Ví dụ 5. Viết các tập hợp sau dưới dạng các khoảng, đoạn, nửa khoảng trong $\mathbb{R}$ rồi biểu diễn trên trục số: $C = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 \leq x \leq 7\}$; $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 2\}$.

Giải

$C = [2; 7]$

$D = (-\infty; 2)$



Luyện tập 4. Hãy ghép mỗi dòng ở cột bên trái với một dòng thích hợp ở cột bên phải.

1) $x \in [2; 5]$	a) $2 < x \leq 5$
2) $x \in (2; 5]$	b) $x \geq 7$
3) $x \in [7; +\infty)$	c) $7 < x < 10$
4) $x \in (7; 10)$	d) $2 \leq x \leq 5$
	e) $2 \leq x < 5$

3. CÁC PHÉP TOÁN TRÊN TẬP HỢP

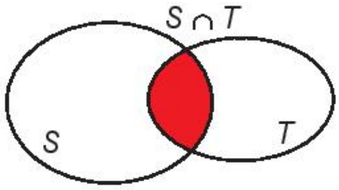
a. Giao của hai tập hợp

HĐ7. Viết tập hợp X gồm những thành viên tham gia cả hai chuyên đề 1 và 2 trong *tình huống mở đầu*.

Tập X có phải là tập con của tập A không? Tập X có phải là tập con của tập B không? (A, B là các tập hợp trong HĐ1).

Tập hợp gồm các phần tử thuộc cả hai tập hợp S và T gọi là giao của hai tập hợp S và T, kí hiệu là $S \cap T$.

$$S \cap T = \{ x \mid x \in S \text{ và } x \in T \}.$$



Hình 1.6

Ví dụ 6

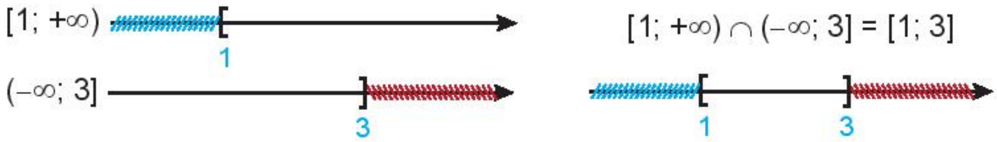
a) Cho hai tập hợp $C = \{4; 7; 27\}$ và $D = \{2; 4; 9; 27; 36\}$. Hãy xác định tập hợp $C \cap D$.

b) Cho hai tập hợp $E = [1; +\infty)$ và $F = (-\infty; 3]$. Hãy xác định tập hợp $E \cap F$.

Giải

a) Giao của hai tập hợp C và D là $C \cap D = \{4; 27\}$.

b) Giao của hai tập hợp E và F là $E \cap F = [1; 3]$.



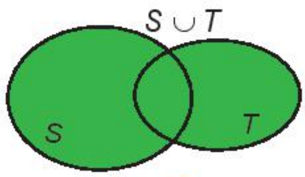
Luyện tập 5. Cho các tập hợp $C = [1; 5]$, $D = [-2; 3]$. Hãy xác định tập hợp $C \cap D$.

b. Hợp của hai tập hợp

HĐ8. Trở lại *tình huống mở đầu*, hãy xác định tập hợp các thành viên tham gia Chuyên đề 1 hoặc Chuyên đề 2.

Tập hợp gồm các phần tử thuộc tập hợp S hoặc thuộc tập hợp T gọi là hợp của hai tập hợp S và T, kí hiệu là $S \cup T$.

$$S \cup T = \{x \mid x \in S \text{ hoặc } x \in T\}.$$



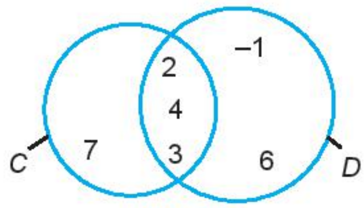
Hình 1.7

Ví dụ 7. Cho hai tập hợp: $C = \{2; 3; 4; 7\}$; $D = \{-1; 2; 3; 4; 6\}$.

Hãy xác định tập hợp $C \cup D$.

Giải

Hợp của hai tập hợp C và D là $C \cup D = \{-1; 2; 3; 4; 6; 7\}$.



Hình 1.8

Ví dụ 8. Trở lại câu hỏi trong *tình huống mở đầu*. Gọi A là tập hợp những thành viên tham gia Chuyên đề 1, B là tập hợp những thành viên tham gia Chuyên đề 2.

Ta có: $A \cup B$ = {Nam; Hương; Chi; Tú; Bình; Ngân; Khánh; Hân; Hiền; Lam}.

Tập $A \cup B$ có 10 phần tử, tức là có 10 thành viên tham gia một hoặc hai chuyên đề.

Số thành viên vắng mặt trong cả hai chuyên đề là:

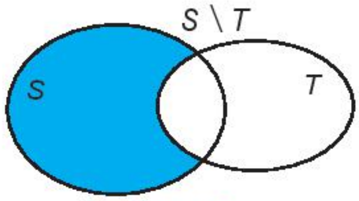
$$12 - 10 = 2 \text{ (thành viên)}.$$

Luyện tập 6. Hãy biểu diễn tập hợp $A \cup B$ bằng biểu đồ Ven, với A, B được cho trong HĐ1.

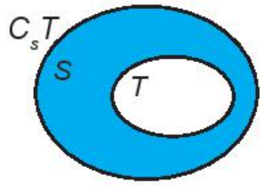
c. Hiệu của hai tập hợp

HĐ9. Trở lại *tình huống mở đầu*, hãy xác định tập hợp các thành viên chỉ tham gia Chuyên đề 1 mà không tham gia Chuyên đề 2.

- Hiệu của hai tập hợp S và T là tập hợp gồm các phần tử thuộc S nhưng không thuộc T, kí hiệu là $S \setminus T$.
  $S \setminus T = \{x \mid x \in S \text{ và } x \notin T\}$.
- Nếu $T \subset S$ thì $S \setminus T$ được gọi là phần bù của T trong S, kí hiệu là $C_S T$.



Hình 1.9



Hình 1.10

Chú ý. $C_S S = \varnothing$.

Ví dụ 9. Cho các tập hợp: $D = \{-2; 3; 5; 6\}$; $E = \{x \mid x$ là số nguyên tố nhỏ hơn $10\}$;
$X = \{x \mid x$ là số nguyên dương nhỏ hơn $10\}$.

a) Tìm $D \setminus E$ và $E \setminus D$.

b) E có là tập con của X không? Hãy tìm phần bù của E trong X (nếu có).

Giải

a) Ta có: $E = \{2; 3; 5; 7\}$.
Do đó, $D \setminus E = \{-2; 6\}$; $E \setminus D = \{2; 7\}$.

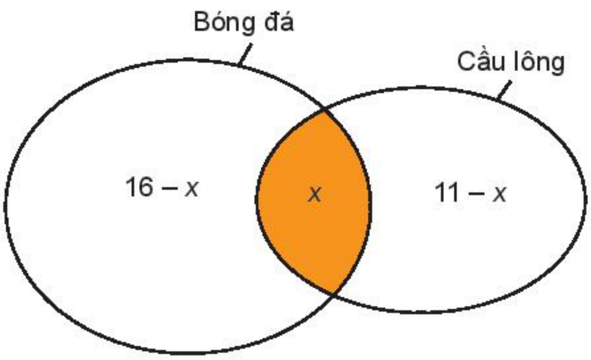
b) Ta có: $X = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$. Vậy E là tập con của X.
Phần bù của E trong X là $X \setminus E = C_X E = \{1; 4; 6; 8; 9\}$.

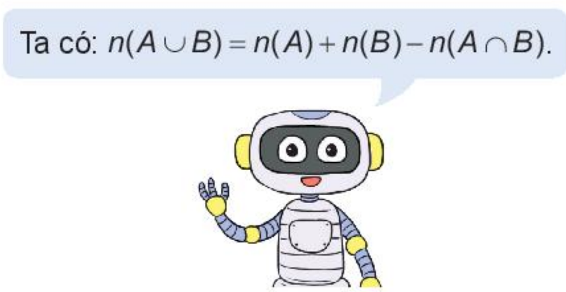
Luyện tập 7. Tìm phần bù của các tập hợp sau trong $\mathbb{R}$:

a) $(-\infty; -2)$; b) $[-5; +\infty)$.

Vận dụng. Lớp 10A có 24 bạn tham gia thi đấu bóng đá và cầu lông, trong đó có 16 bạn thi đấu bóng đá và 11 bạn thi đấu cầu lông. Giả sử các trận bóng đá và cầu lông không tổ chức đồng thời. Hỏi có bao nhiêu bạn lớp 10A tham gia thi đấu cả bóng đá và cầu lông?

Gợi ý. Gọi x là số bạn tham gia thi đấu cả bóng đá và cầu lông.





BÀI TẬP

1.8. Gọi X là tập hợp các quốc gia tiếp giáp với Việt Nam. Hãy liệt kê các phần tử của tập hợp X và biểu diễn tập X bằng biểu đồ Ven.

1.9. Kí hiệu E là tập hợp các quốc gia tại khu vực Đông Nam Á.

a) Nêu ít nhất hai phần tử thuộc tập hợp E.

b) Nêu ít nhất hai phần tử không thuộc tập hợp E.

c) Liệt kê các phần tử thuộc tập hợp E. Tập hợp E có bao nhiêu phần tử?

1.10. Hãy viết tập hợp sau bằng cách nêu tính chất đặc trưng cho các phần tử của tập hợp:

$$A = \{0; 4; 8; 12; 16\}.$$

1.11. Trong các tập hợp sau, tập nào là tập rỗng?

$A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 6 = 0\}$; $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid x^2 - 6 = 0\}$.

1.12. Cho $X = \{a; b\}$. Các cách viết sau đúng hay sai? Giải thích kết luận đưa ra.

a) $a \subset X$; b) $\{a\} \subset X$; c) $\varnothing \in X$.

1.13. Cho $A = \{2; 5\}$, $B = \{5; x\}$, $C = \{2; y\}$. Tìm x và y để $A = B = C$.

1.14. Cho $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid x < 4\}$; $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid (5x - 3x^2)(x^2 + 2x - 3) = 0\}$.

a) Liệt kê các phần tử của hai tập hợp A và B.

b) Hãy xác định các tập hợp $A \cap B$, $A \cup B$ và $A \setminus B$.

1.15. Xác định các tập hợp sau và biểu diễn chúng trên trục số.

a) $(-4; 1] \cap [0; 3)$; b) $(0; 2] \cup (-3; 1]$;

c) $(-2; 1) \cap (-\infty; 1]$; d) $\mathbb{R} \setminus (-\infty; 3]$.

1.16. Để phục vụ cho một hội nghị quốc tế, ban tổ chức huy động 35 người phiên dịch tiếng Anh, 30 người phiên dịch tiếng Pháp, trong đó có 16 người phiên dịch được cả hai thứ tiếng Anh và Pháp. Hãy trả lời các câu hỏi sau:

a) Ban tổ chức đã huy động bao nhiêu người phiên dịch cho hội nghị đó?

b) Có bao nhiêu người chỉ phiên dịch được tiếng Anh?

c) Có bao nhiêu người chỉ phiên dịch được tiếng Pháp?

BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG I

A – TRẮC NGHIỆM

1.17. Câu nào sau đây **không** là mệnh đề?

A. Tam giác đều là tam giác có ba cạnh bằng nhau.

B. $3 < 1$.

C. $4 - 5 = 1$.

D. Bạn học giỏi quá!

1.18. Cho định lí: "Nếu hai tam giác bằng nhau thì diện tích của chúng bằng nhau".

Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. Hai tam giác bằng nhau là điều kiện cần để diện tích của chúng bằng nhau.

B. Hai tam giác bằng nhau là điều kiện cần và đủ để chúng có diện tích bằng nhau.

C. Hai tam giác có diện tích bằng nhau là điều kiện đủ để chúng bằng nhau.

D. Hai tam giác bằng nhau là điều kiện đủ để diện tích của chúng bằng nhau.

1.19. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. $\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 > 1 \Rightarrow x > -1$.

B. $\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 > 1 \Rightarrow x > 1$.

C. $\forall x \in \mathbb{R},\ x > -1 \Rightarrow x^2 > 1$.

D. $\forall x \in \mathbb{R},\ x > 1 \Rightarrow x^2 > 1$.

1.20. Cho tập hợp $A = \{a;\ b;\ c\}$. Tập A có bao nhiêu tập con?

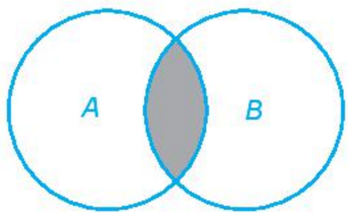
A. 4.

B. 6.

C. 8.

D. 10.

1.21. Cho các tập hợp A, B được minh hoạ bằng biểu đồ Ven như hình bên. Phần tô màu xám trong hình là biểu diễn của tập hợp nào sau đây?



A. $A \cap B$.

B. $A \setminus B$.

C. $A \cup B$.

D. $B \setminus A$.

B – TỰ LUẬN

1.22. Biểu diễn các tập hợp sau bằng biểu đồ Ven:

a) $A = \{0;\ 1;\ 2;\ 3\}$;

b) $B = \{$Lan; Huệ; Trang$\}$.

1.23. Phần không bị gạch trên trục số dưới đây biểu diễn tập hợp số nào?

1.24. Cho $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x < 7\}$; $B = \{1; 2; 3; 6; 7; 8\}$. Xác định các tập hợp sau:

$$A \cup B;\ A \cap B;\ A \setminus B.$$

1.25. Cho hai tập hợp $A = [-2; 3]$ và $B = (1; +\infty)$. Xác định các tập hợp sau:

$$A \cap B;\ B \setminus A \text{ và } C_{\mathbb{R}}B.$$

1.26. Xác định các tập hợp sau và biểu diễn chúng trên trục số.

a) $(-\infty; 1) \cap (0; +\infty)$; b) $(4; 7] \cup (-1; 5)$; c) $(4; 7] \setminus (-3; 5]$.

1.27. Một cuộc khảo sát về khách du lịch thăm vịnh Hạ Long cho thấy trong 1 410 khách du lịch được phỏng vấn có 789 khách du lịch đến thăm động Thiên Cung, 690 khách du lịch đến đảo Titop. Toàn bộ khách được phỏng vấn đã đến ít nhất một trong hai địa điểm trên. Hỏi có bao nhiêu khách du lịch vừa đến thăm động Thiên Cung vừa đến thăm đảo Titop ở vịnh Hạ Long?

Em có biết?

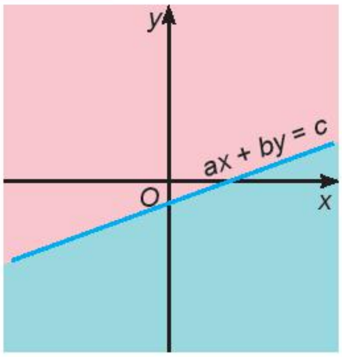
Đảo Titop nằm trong vịnh Hạ Long, thuộc thành phố Hạ Long, tỉnh Quảng Ninh, cách cảng tàu du lịch Bãi Cháy khoảng 7 – 8 km về phía đông nam. Dưới chân đảo là một bãi tắm có hình vầng trăng ôm trọn lấy chân đảo, bãi cát tuy nhỏ nhưng rất thoáng đãng và yên tĩnh, bốn mùa nước sạch và trong xanh. Ngày 22-11-1962, Chủ tịch Hồ Chí Minh cùng nhà du hành vũ trụ người Liên Xô G.Titop lên thăm đảo. Để ghi dấu kỉ niệm chuyến đi đó, Chủ tịch Hồ Chí Minh đã đặt tên cho đảo là đảo Titop.

(Theo *tuoitre.vn*)

Đảo Titop, vịnh Hạ Long

CHƯƠNG II

BẤT PHƯƠNG TRÌNH VÀ HỆ BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN



Các bất phương trình bậc nhất hai ẩn và hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn xuất hiện trong nhiều bài toán kinh tế, như là những ràng buộc trong các bài toán sản xuất, bài toán phân phối hàng hoá,... Chương này cung cấp cách biểu diễn miền nghiệm của các bất phương trình và hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn trên mặt phẳng toạ độ.

Bài 3 BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN

THUẬT NGỮ

- Bất phương trình bậc nhất hai ẩn
- Miền nghiệm của bất phương trình bậc nhất hai ẩn

KIẾN THỨC, KĨ NĂNG

- Nhận biết bất phương trình bậc nhất hai ẩn.
- Biết biểu diễn miền nghiệm của bất phương trình bậc nhất hai ẩn trên mặt phẳng toạ độ.
- Vận dụng kiến thức về bất phương trình bậc nhất hai ẩn vào giải quyết bài toán thực tiễn.

Nhân ngày Quốc tế Thiếu nhi 1-6, một rạp chiếu phim phục vụ các khán giả một bộ phim hoạt hình. Vé được bán ra có hai loại:

Loại 1 (dành cho trẻ từ 6-13 tuổi): 50 000 đồng/vé;

Loại 2 (dành cho người trên 13 tuổi): 100 000 đồng/vé.

Người ta tính toán rằng, để không phải bù lỗ thì số tiền vé thu được ở rạp chiếu phim này phải đạt tối thiểu 20 triệu đồng.

Hỏi số lượng vé bán được trong những trường hợp nào thì rạp chiếu phim phải bù lỗ?

1. BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN

HĐ1. Trong *tình huống mở đầu*, gọi x là số vé loại 1 bán được và y là số vé loại 2 bán được. Viết biểu thức tính số tiền bán vé thu được (đơn vị nghìn đồng) ở rạp chiếu phim đó theo x và y.

a) Các số nguyên không âm x và y phải thoả mãn điều kiện gì để số tiền bán vé thu được đạt tối thiểu 20 triệu đồng?

b) Nếu số tiền bán vé thu được nhỏ hơn 20 triệu đồng thì x và y thoả mãn điều kiện gì?

Mỗi hệ thức liên hệ giữa x và y thu được trong HĐ1a và HĐ1b được gọi là một *bất phương trình bậc nhất hai ẩn*.

> Bất phương trình bậc nhất hai ẩn x, y có dạng tổng quát là:
> $$ax + by \le c \; (ax + by \ge c, \; ax + by < c, \; ax + by > c)$$
> trong đó a, b, c là những số thực đã cho, a và b không đồng thời bằng 0, x và y là các ẩn số.

Ví dụ 1. Bất phương trình nào sau đây là bất phương trình bậc nhất hai ẩn?

$$2x + 3y < 1; \qquad 2x^2 + 3y < 1.$$

Giải

Bất phương trình $2x + 3y < 1$ là bất phương trình bậc nhất hai ẩn.

Bất phương trình $2x^2 + 3y < 1$ không phải là bất phương trình bậc nhất hai ẩn vì chứa x^2.

HĐ2. Cặp số $(x; y) = (100; 100)$ thoả mãn bất phương trình bậc nhất hai ẩn nào trong hai bất phương trình thu được ở HĐ1? Từ đó cho biết rạp chiếu phim có phải bù lỗ hay không nếu bán được 100 vé loại 1 và 100 vé loại 2.

Trả lời câu hỏi tương tự với cặp số $(x; y) = (150; 150)$.

> Cặp số $(x_0; y_0)$ được gọi là một nghiệm của bất phương trình bậc nhất hai ẩn $ax + by \le c$ nếu bất đẳng thức $ax_0 + by_0 \le c$ đúng.

Ví dụ 2. Cho bất phương trình bậc nhất hai ẩn $x + 2y > 5$. Cặp số nào sau đây là một nghiệm của bất phương trình bậc nhất hai ẩn trên?

a) $(x; y) = (3; 4)$; b) $(x; y) = (0; -1)$.

Giải

a) Vì $3 + 2 \cdot 4 = 11 > 5$ nên cặp số $(3; 4)$ là một nghiệm của bất phương trình đã cho.

b) Vì $0 + 2 \cdot (-1) = -2 < 5$ nên cặp số $(0; -1)$ không phải là một nghiệm của bất phương trình đã cho.

Luyện tập 1. Cho bất phương trình bậc nhất hai ẩn $x + 2y \ge 0$.

a) Hãy chỉ ra ít nhất hai nghiệm của bất phương trình trên.

b) Với $y = 0$, có bao nhiêu giá trị của x thoả mãn bất phương trình đã cho?

Nhận xét. Bất phương trình bậc nhất hai ẩn luôn có vô số nghiệm.

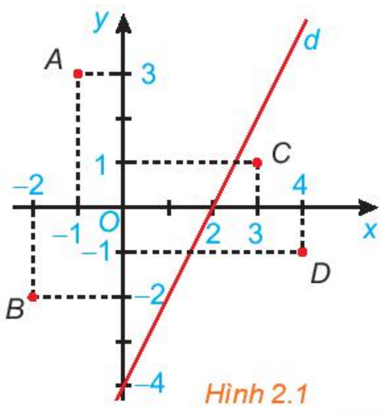
2. BIỂU DIỄN MIỀN NGHIỆM CỦA BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN TRÊN MẶT PHẲNG TOẠ ĐỘ

HĐ3. Cho đường thẳng d: $2x - y = 4$ trên mặt phẳng toạ độ Oxy (H.2.1). Đường thẳng này chia mặt phẳng thành hai nửa mặt phẳng.

a) Các điểm $O(0; 0)$, $A(-1; 3)$ và $B(-2; -2)$ có thuộc cùng một nửa mặt phẳng bờ là đường thẳng d không?

Tính giá trị của biểu thức $2x - y$ tại các điểm đó và so sánh với 4.

b) Trả lời câu hỏi tương tự như câu a với các điểm $C(3; 1)$, $D(4; -1)$.



Hình 2.1

- Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, tập hợp các điểm có toạ độ là nghiệm của bất phương trình $ax + by \leq c$ được gọi là miền nghiệm của bất phương trình đó.
- Người ta chứng minh được rằng đường thẳng d có phương trình $ax + by = c$ chia mặt phẳng toạ độ Oxy thành hai nửa mặt phẳng bờ d:
  - Một nửa mặt phẳng (không kể bờ d) gồm các điểm có toạ độ $(x;\, y)$ thoả mãn $ax + by > c$;
  - Nửa mặt phẳng còn lại (không kể bờ d) gồm các điểm có toạ độ $(x;\, y)$ thoả mãn $ax + by < c$.

  Bờ d gồm các điểm có toạ độ $(x;\, y)$ thoả mãn $ax + by = c$.

Ví dụ 3. Biểu diễn miền nghiệm của bất phương trình $x + y \geq 100$ trên mặt phẳng toạ độ.

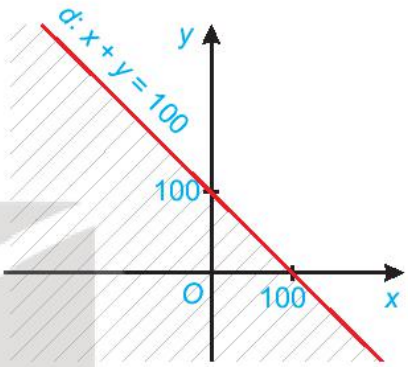
Giải (H.2.2)

Ta biểu diễn miền nghiệm của bất phương trình bậc nhất hai ẩn $x + y \geq 100$ như sau:

Bước 1. Vẽ đường thẳng d: $x + y = 100$ trên mặt phẳng toạ độ Oxy.

Bước 2. Lấy một điểm bất kì không thuộc d trên mặt phẳng rồi thay vào biểu thức $x + y$. Chẳng hạn, lấy $O(0;0)$, ta có: $0 + 0 < 100$.

Do đó miền nghiệm của bất phương trình đã cho là nửa mặt phẳng bờ d không chứa gốc toạ độ (miền không bị gạch).



Hình 2.2

Cách biểu diễn miền nghiệm của bất phương trình bậc nhất hai ẩn $ax + by \leq c$.

- Vẽ đường thẳng d: $ax + by = c$ trên mặt phẳng toạ độ Oxy.
- Lấy một điểm $M_0(x_0; y_0)$ không thuộc d.
- Tính $ax_0 + by_0$ và so sánh với c.
- Nếu $ax_0 + by_0 < c$ thì nửa mặt phẳng bờ d chứa M_0 là miền nghiệm của bất phương trình. Nếu $ax_0 + by_0 > c$ thì nửa mặt phẳng bờ d không chứa M_0 là miền nghiệm của bất phương trình.

- Nếu $c \neq 0$, ta thường chọn M_0 chính là gốc toạ độ.
- Nếu $c = 0$, ta thường chọn M_0 có toạ độ $(1;\, 0)$ hoặc $(0;\, 1)$.

Ví dụ 4. Biểu diễn miền nghiệm của bất phương trình $5x - 7y \leq 0$ trên mặt phẳng toạ độ.

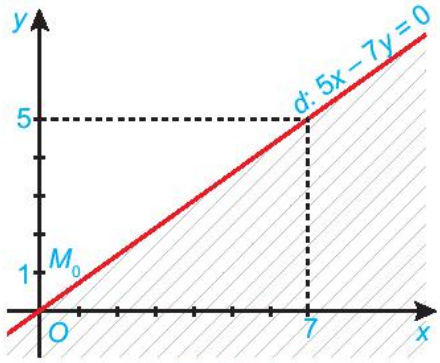
Giải (H.2.3)

Bước 1. Vẽ đường thẳng d: $5x - 7y = 0$ trên mặt phẳng toạ độ Oxy.

Bước 2. Lấy điểm $M_0(0;\, 1)$ không thuộc d và thay $x = 0$, $y = 1$ vào biểu thức $5x - 7y$ ta được: $5 \cdot 0 - 7 \cdot 1 = -7 < 0$.

Do đó miền nghiệm của bất phương trình là nửa mặt phẳng bờ d chứa điểm M_0 (miền không bị gạch).

Chú ý. Miền nghiệm của bất phương trình $ax + by < c$ là miền nghiệm của bất phương trình $ax + by \leq c$ bỏ đi đường thẳng $ax + by = c$ và biểu diễn đường thẳng bằng nét đứt.



Hình 2.3

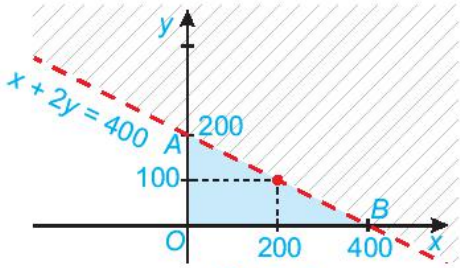
Luyện tập 2. Biểu diễn miền nghiệm của bất phương trình $2x + y < 200$ trên mặt phẳng toạ độ.

Ví dụ 5. Giải bài toán ở *tình huống mở đầu*.

Giải

Gọi x là số lượng vé loại 1 bán được ($x \in \mathbb{N}$) và y là số lượng vé loại 2 bán được ($y \in \mathbb{N}$) thì số tiền bán vé thu được là $50x + 100y$ (nghìn đồng). Người ta sẽ phải bù lỗ trong trường hợp số tiền bán vé nhỏ hơn 20 triệu đồng, tức là: $50x + 100y < 20\,000$ hay $x + 2y < 400$.

Như vậy, việc giải quyết bài toán mở đầu dẫn đến việc đi tìm miền nghiệm của bất phương trình $x + 2y < 400$.



Hình 2.4

Miền nghiệm của bất phương trình bậc nhất hai ẩn này được xác định như sau:

- Vẽ đường thẳng d: $x + 2y = 400$.
- Ta lấy gốc toạ độ $O(0; 0)$ và tính $0 + 2 \cdot 0 = 0 < 400$.

Do đó, miền nghiệm của bất phương trình là nửa mặt phẳng bờ d chứa gốc toạ độ không kể đường thẳng d (H.2.4).

Vậy, nếu bán được số vé loại 1 là x và số vé loại 2 là y mà điểm $(x; y)$ nằm trong miền tam giác OAB không kể cạnh AB thì rạp chiếu phim sẽ phải bù lỗ.

Nếu điểm $(x; y)$ nằm trên đoạn thẳng AB thì rạp chiếu phim hoà vốn.

Nhận xét

- Nếu bán được 150 vé loại 1 và 150 vé loại 2 thì rạp chiếu phim có lãi.
- Nếu bán được 200 vé loại 1 và 100 vé loại 2 thì rạp chiếu phim hoà vốn.
- Nếu bán được 100 vé loại 1 và 100 vé loại 2 thì rạp chiếu phim phải bù lỗ.

Vận dụng. Một công ty viễn thông tính phí 1 nghìn đồng mỗi phút gọi nội mạng và 2 nghìn đồng mỗi phút gọi ngoại mạng. Em có thể sử dụng bao nhiêu phút gọi nội mạng và bao nhiêu phút gọi ngoại mạng trong một tháng nếu em muốn số tiền phải trả ít hơn 200 nghìn đồng?

BÀI TẬP

2.1. Bất phương trình nào sau đây là bất phương trình bậc nhất hai ẩn?

a) $2x + 3y > 6$; b) $2^2x + y \le 0$; c) $2x^2 - y \ge 1$.

2.2. Biểu diễn miền nghiệm của mỗi bất phương trình sau trên mặt phẳng toạ độ:

a) $3x + 2y \ge 300$; b) $7x + 20y < 0$.

2.3. Ông An muốn thuê một chiếc ô tô (có lái xe) trong một tuần. Giá thuê xe được cho như bảng sau:

	Phí cố định (nghìn đồng/ngày)	Phí tính theo quãng đường di chuyển (nghìn đồng/kilômét)
Từ thứ Hai đến thứ Sáu	900	8
Thứ Bảy và Chủ nhật	1 500	10

a) Gọi x và y lần lượt là số kilômét ông An đi trong các ngày từ thứ Hai đến thứ Sáu và trong hai ngày cuối tuần. Viết bất phương trình biểu thị mối liên hệ giữa x và y sao cho tổng số tiền ông An phải trả không quá 14 triệu đồng.

b) Biểu diễn miền nghiệm của bất phương trình ở câu a trên mặt phẳng toạ độ.

Bài 4 HỆ BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN

THUẬT NGỮ

- Hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn
- Miền nghiệm của hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn

KIẾN THỨC, KĨ NĂNG

- Nhận biết hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn.
- Biết biểu diễn miền nghiệm của hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn trên mặt phẳng toạ độ.
- Vận dụng kiến thức hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn vào giải quyết bài toán thực tiễn.

Trong năm nay, một cửa hàng điện lạnh dự định kinh doanh hai loại máy điều hoà: điều hoà hai chiều và điều hoà một chiều với số vốn ban đầu không vượt quá 1,2 tỉ đồng.

	Điều hoà hai chiều	Điều hoà một chiều
Giá mua vào	20 triệu đồng/1 máy	10 triệu đồng/1 máy
Lợi nhuận dự kiến	3,5 triệu đồng/1 máy	2 triệu đồng/1 máy

Cửa hàng ước tính rằng tổng nhu cầu của thị trường sẽ không vượt quá 100 máy cả hai loại. Nếu là chủ cửa hàng thì em cần đầu tư kinh doanh mỗi loại bao nhiêu máy để lợi nhuận thu được là lớn nhất?

1. HỆ BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN

HĐ1. Trong *tình huống mở đầu*, gọi x và y lần lượt là số máy điều hoà loại hai chiều và một chiều mà cửa hàng cần nhập. Tính số tiền vốn mà cửa hàng phải bỏ ra để nhập hai loại máy điều hoà theo x và y.

a) Do nhu cầu của thị trường không quá 100 máy nên x và y cần thoả mãn điều kiện gì?

b) Vì số vốn mà chủ cửa hàng có thể đầu tư không vượt quá 1,2 tỉ đồng nên x và y phải thoả mãn điều kiện gì?

c) Tính số tiền lãi mà cửa hàng dự kiến thu được theo x và y.

Như vậy, x và y trong HĐ1 phải thoả mãn một số bất phương trình bậc nhất hai ẩn.

- Hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn là một hệ gồm hai hay nhiều bất phương trình bậc nhất hai ẩn.
- Cặp số $(x_0; y_0)$ là nghiệm của một hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn khi $(x_0; y_0)$ đồng thời là nghiệm của tất cả các bất phương trình trong hệ đó.

Ví dụ 1. Cho hệ bất phương trình $\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x + y \leq 150. \end{cases}$

a) Hệ trên có phải là một hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn không?

b) Kiểm tra xem cặp số $(x; y) = (0; 0)$ có phải là một nghiệm của hệ bất phương trình trên không.

Giải

a) Hệ bất phương trình đã cho là một hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn x và y.

b) Cặp số $(x; y) = (0; 0)$ thoả mãn cả ba bất phương trình của hệ nên nó là một nghiệm của hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn đã cho.

Luyện tập 1. Trong *tình huống mở đầu*, gọi x và y lần lượt là số máy điều hoà loại hai chiều và một chiều mà cửa hàng cần nhập. Từ HĐ1, viết hệ bất phương trình hai ẩn x, y và chỉ ra một nghiệm của hệ này.

2. BIỂU DIỄN MIỀN NGHIỆM CỦA HỆ BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN TRÊN MẶT PHẲNG TOẠ ĐỘ

HĐ2. Cho đường thẳng d: $x + y = 150$ trên mặt phẳng toạ độ Oxy. Đường thẳng này cắt hai trục toạ độ Ox và Oy tại hai điểm A và B.

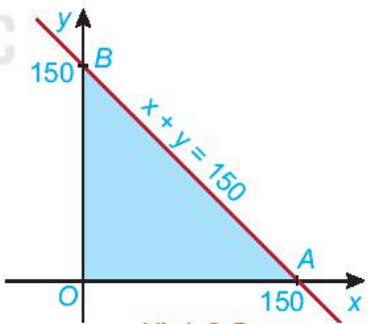
a) Xác định các miền nghiệm D_1, D_2, D_3 của các bất phương trình tương ứng $x \geq 0$; $y \geq 0$ và $x + y \leq 150$.

b) Miền tam giác OAB (H.2.5) có phải là giao của các miền D_1, D_2 và D_3 hay không?

c) Lấy một điểm trong tam giác OAB (chẳng hạn điểm (1; 2)) hoặc một điểm trên cạnh nào đó của tam giác OAB (chẳng hạn điểm (1; 149)) và kiểm tra xem toạ độ của các điểm đó có phải là nghiệm của hệ bất phương trình sau hay không:

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x + y \leq 150. \end{cases}$$

Phương trình của trục Ox là $y = 0$ và phương trình của trục Oy là $x = 0$.



Hình 2.5

- Trong mặt phẳng toạ độ, tập hợp các điểm có toạ độ là nghiệm của hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn là miền nghiệm của hệ bất phương trình đó.
- Miền nghiệm của hệ là giao các miền nghiệm của các bất phương trình trong hệ.

Ví dụ 2. Biểu diễn miền nghiệm của hệ bất phương trình sau trên mặt phẳng toạ độ:

$$\begin{cases} 7x + 4y \leq 2\,400 \\ x + y \leq 100 \\ x \geq 0. \end{cases}$$

Giải (H.2.6)

Bước 1. Xác định miền nghiệm D_1 của bất phương trình $7x + 4y \leq 2\,400$ và gạch bỏ miền còn lại.

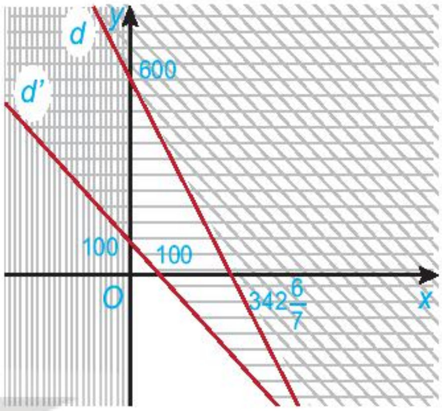
- Vẽ đường thẳng d: $7x + 4y = 2\,400$.
- Vì $7 \cdot 0 + 4 \cdot 0 = 0 < 2\,400$ nên toạ độ điểm $O(0; 0)$ thoả mãn bất phương trình
$$7x + 4y \leq 2\,400.$$

Do đó, miền nghiệm D_1 của bất phương trình $7x + 4y \leq 2\,400$ là nửa mặt phẳng bờ d chứa gốc toạ độ O.

Bước 2. Tương tự, miền nghiệm D_2 của bất phương trình $x + y \leq 100$ là nửa mặt phẳng bờ d' chứa gốc toạ độ O.

Bước 3. Tương tự, miền nghiệm D_3 của bất phương trình $x \geq 0$ là nửa mặt phẳng bờ Oy chứa điểm $(1; 0)$.

Khi đó, miền không bị gạch chính là giao các miền nghiệm của các bất phương trình trong hệ. Vậy miền nghiệm của hệ là miền không bị gạch trong Hình 2.6.



Hình 2.6

> Cách xác định miền nghiệm của một hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn:
> - Trên cùng một mặt phẳng toạ độ, xác định miền nghiệm của mỗi bất phương trình bậc nhất hai ẩn trong hệ và gạch bỏ miền còn lại.
> - Miền không bị gạch là miền nghiệm của hệ bất phương trình đã cho.

Chú ý. Nếu trong HĐ2, hệ được thay bởi $\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x + y < 150 \end{cases}$ thì miền nghiệm sẽ là miền tam giác OAB bỏ đi cạnh AB.

Luyện tập 2. Biểu diễn miền nghiệm của hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn sau trên mặt phẳng toạ độ: $\begin{cases} x \geq 0 \\ y > 0 \\ x + y \leq 100 \\ 2x + y < 120. \end{cases}$

3. ỨNG DỤNG CỦA HỆ BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN

HĐ3. Xét biểu thức $F(x; y) = 2x + 3y$ với $(x; y)$ thuộc miền tam giác OAB ở HĐ2. Toạ độ ba đỉnh là $O(0; 0)$, $A(150; 0)$ và $B(0; 150)$ (H.2.5).

a) Tính giá trị của biểu thức $F(x; y)$ tại mỗi đỉnh O, A và B.

b) Nêu nhận xét về dấu của hoành độ x và tung độ y của điểm $(x; y)$ nằm trong miền tam giác OAB. Từ đó suy ra giá trị nhỏ nhất của $F(x; y)$ trên miền tam giác OAB.

c) Nêu nhận xét về tổng $x + y$ của điểm $(x; y)$ nằm trong miền tam giác OAB. Từ đó suy ra giá trị lớn nhất của $F(x; y)$ trên miền tam giác OAB.

Nhận xét. Tổng quát, người ta chứng minh được rằng giá trị lớn nhất (hay nhỏ nhất) của biểu thức $F(x; y) = ax + by$, với $(x; y)$ là toạ độ các điểm thuộc miền đa giác $A_1A_2\ldots A_n$, tức là các điểm nằm bên trong hay nằm trên các cạnh của đa giác, đạt được tại một trong các đỉnh của đa giác đó.

Ví dụ 3. Giải bài toán ở *tình huống mở đầu.*

Giải

Giả sử cửa hàng cần nhập số máy điều hoà hai chiều là x và số máy điều hoà một chiều là y. Khi đó ta có $x \geq 0$, $y \geq 0$.

Vì nhu cầu của thị trường không quá 100 máy nên $x + y \leq 100$.

Số tiền để nhập hai loại máy điều hoà với số lượng như trên là: $20x + 10y$ (triệu đồng).

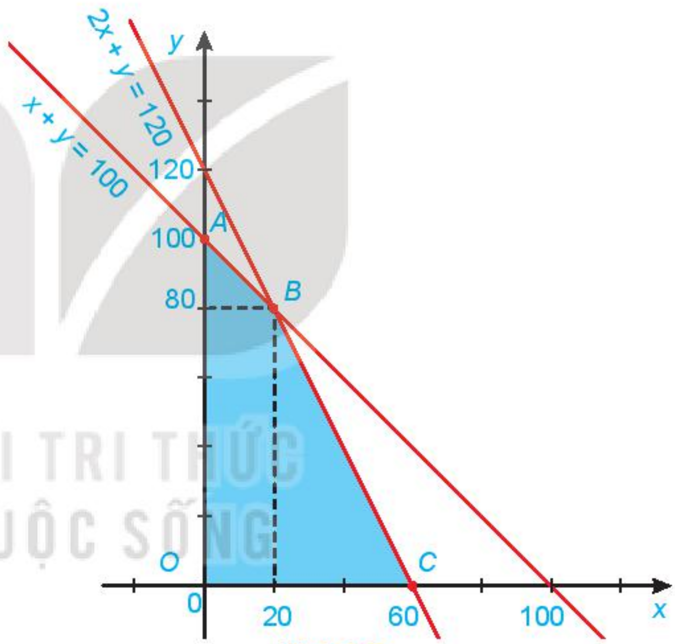
Số tiền tối đa để đầu tư cho hai loại máy là 1,2 tỉ đồng, nên ta có $20x + 10y \leq 1\,200$ hay $2x + y \leq 120$.

Từ đó ta thu được hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn sau:

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x + y \leq 100 \\ 2x + y \leq 120. \end{cases}$$

Lợi nhuận thu được khi bán x máy điều hoà hai chiều và y máy điều hoà một chiều là $F(x; y) = 3,5x + 2y$.

Ta cần tìm giá trị lớn nhất của $F(x; y)$ khi $(x; y)$ thoả mãn hệ bất phương trình trên.



Hình 2.7

Bước 1. Xác định miền nghiệm của hệ bất phương trình trên. Miền nghiệm là miền tứ giác $OABC$ với toạ độ các đỉnh $O(0;0)$, $A(0;100)$, $B(20;80)$ và $C(60;0)$ (H.2.7).

Bước 2. Tính giá trị của biểu thức F tại các đỉnh của tứ giác này:

$F(0;0) = 0$, $F(0;100) = 200$, $F(20;80) = 230$, $F(60;0) = 210$.

Bước 3. So sánh các giá trị thu được của F ở Bước 2, ta được giá trị lớn nhất cần tìm là $F(20;80) = 230$.

Vậy cửa hàng cần đầu tư kinh doanh 20 máy điều hoà hai chiều và 80 máy điều hoà một chiều để lợi nhuận thu được là lớn nhất.

Vận dụng. Một cửa hàng có kế hoạch nhập về hai loại máy tính A và B, giá mỗi chiếc lần lượt là 10 triệu đồng và 20 triệu đồng với số vốn ban đầu không vượt quá 4 tỉ đồng. Loại máy A mang lại lợi nhuận 2,5 triệu đồng cho mỗi máy bán được và loại máy B mang lại lợi nhuận là 4 triệu đồng mỗi máy. Cửa hàng ước tính rằng tổng nhu cầu hàng tháng sẽ không vượt quá 250 máy. Giả sử trong một tháng cửa hàng cần nhập số máy tính loại A là x và số máy tính loại B là y.

a) Viết các bất phương trình biểu thị các điều kiện của bài toán thành một hệ bất phương trình rồi xác định miền nghiệm của hệ đó.

b) Gọi F (triệu đồng) là lợi nhuận mà cửa hàng thu được trong tháng đó khi bán x máy tính loại A và y máy tính loại B. Hãy biểu diễn F theo x và y.

c) Tìm số lượng máy tính mỗi loại cửa hàng cần nhập về trong tháng đó để lợi nhuận thu được là lớn nhất.

BÀI TẬP

2.4. Hệ bất phương trình nào sau đây là hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn?

a) $\begin{cases} x < 0 \\ y \geq 0; \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + y^2 < 0 \\ y - x > 1; \end{cases}$ c) $\begin{cases} x + y + z < 0 \\ y < 0; \end{cases}$ d) $\begin{cases} -2x + y < 3^2 \\ 4^2 x + 3y < 1. \end{cases}$

2.5. Biểu diễn miền nghiệm của mỗi hệ bất phương trình sau trên mặt phẳng toạ độ:

a) $\begin{cases} y - x < -1 \\ x > 0 \\ y < 0; \end{cases}$ b) $\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 2x + y \leq 4; \end{cases}$ c) $\begin{cases} x \geq 0 \\ x + y > 5 \\ x - y < 0. \end{cases}$

2.6. Một gia đình cần ít nhất 900 đơn vị protein và 400 đơn vị lipit trong thức ăn mỗi ngày. Mỗi kilôgam thịt bò chứa 800 đơn vị protein và 200 đơn vị lipit. Mỗi kilôgam thịt lợn chứa 600 đơn vị protein và 400 đơn vị lipit. Biết rằng gia đình này chỉ mua nhiều nhất là 1,6 kg thịt bò và 1,1 kg thịt lợn; giá tiền 1 kg thịt bò là 250 nghìn đồng; 1 kg thịt lợn là 160 nghìn đồng. Giả sử gia đình đó mua x kilôgam thịt bò và y kilôgam thịt lợn.

a) Viết các bất phương trình biểu thị các điều kiện của bài toán thành một hệ bất phương trình rồi xác định miền nghiệm của hệ đó.

b) Gọi F (nghìn đồng) là số tiền phải trả cho x kilôgam thịt bò và y kilôgam thịt lợn. Hãy biểu diễn F theo x và y.

c) Tìm số kilôgam thịt mỗi loại mà gia đình cần mua để chi phí là ít nhất.

BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG II

A – TRẮC NGHIỆM

2.7. Bất phương trình nào sau đây là bất phương trình bậc nhất hai ẩn?

A. $x + y > 3$. B. $x^2 + y^2 \le 4$. C. $(x - y)(3x + y) \ge 1$. D. $y^3 - 2 \le 0$.

2.8. Cho bất phương trình $2x + y > 3$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

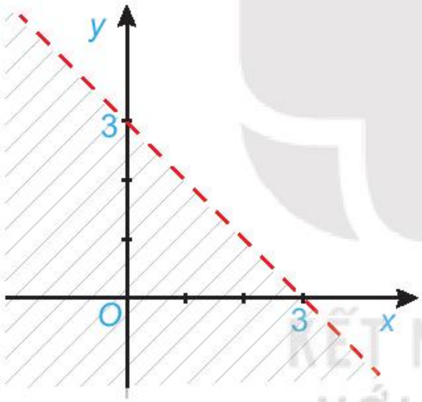
A. Bất phương trình đã cho có nghiệm duy nhất.

B. Bất phương trình đã cho vô nghiệm.

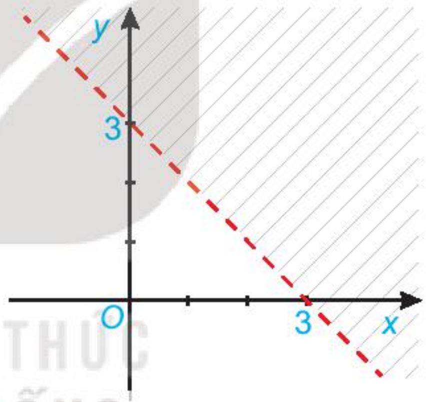
C. Bất phương trình đã cho có vô số nghiệm.

D. Bất phương trình đã cho có tập nghiệm là $[3; +\infty)$.

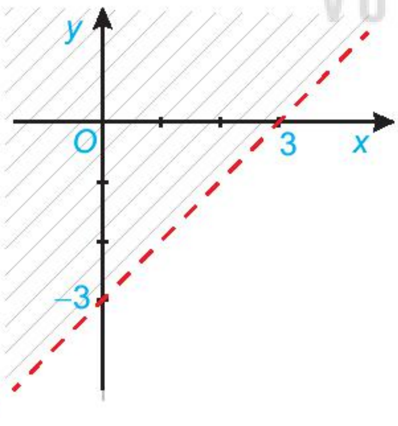
2.9. Hình nào sau đây biểu diễn miền nghiệm của bất phương trình $x - y < 3$?



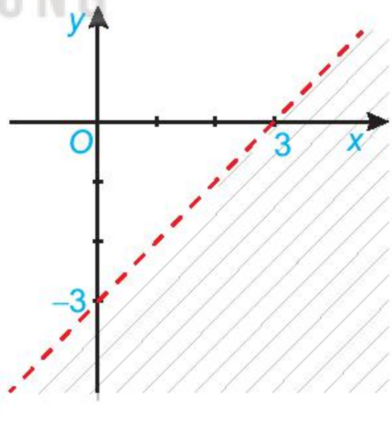
A.



B.



C.



D.

2.10. Hệ bất phương trình nào sau đây là hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn?

A. $\begin{cases} x - y < 0 \\ 2y \ge 0. \end{cases}$ B. $\begin{cases} 3x + y^3 < 0 \\ x + y > 3. \end{cases}$ C. $\begin{cases} x + 2y < 0 \\ y^2 + 3 < 0. \end{cases}$ D. $\begin{cases} -x^3 + y < 4 \\ x + 2y < 1. \end{cases}$

2.11. Cho hệ bất phương trình $\begin{cases} x - y < -3 \\ 2y \geq -4 \end{cases}$. Điểm nào sau đây thuộc miền nghiệm của hệ đã cho?

A. (0; 0). B. (−2; 1). C. (3; −1). D. (−3; 1).

B – TỰ LUẬN

2.12. Biểu diễn miền nghiệm của bất phương trình $\dfrac{x+y}{2} \geq \dfrac{2x-y+1}{3}$ trên mặt phẳng toạ độ.

2.13. Biểu diễn miền nghiệm của hệ bất phương trình $\begin{cases} x + y < 1 \\ 2x - y \geq 3 \end{cases}$ trên mặt phẳng toạ độ.

2.14. Biểu diễn miền nghiệm của hệ bất phương trình $\begin{cases} y - 2x \leq 2 \\ y \leq 4 \\ x \leq 5 \\ x + y \geq -1 \end{cases}$ trên mặt phẳng toạ độ.

Từ đó tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $F(x; y) = -x - y$ với $(x; y)$ thoả mãn hệ trên.

2.15. Bác An đầu tư 1,2 tỉ đồng vào ba loại trái phiếu: trái phiếu chính phủ với lãi suất 7% một năm, trái phiếu ngân hàng với lãi suất 8% một năm và trái phiếu doanh nghiệp rủi ro cao với lãi suất 12% một năm. Vì lí do giảm thuế, bác An muốn số tiền đầu tư trái phiếu chính phủ gấp ít nhất 3 lần số tiền đầu tư trái phiếu ngân hàng. Hơn nữa, để giảm thiểu rủi ro, bác An đầu tư không quá 200 triệu đồng cho trái phiếu doanh nghiệp. Hỏi bác An nên đầu tư mỗi loại trái phiếu bao nhiêu tiền để lợi nhuận thu được sau một năm là lớn nhất?

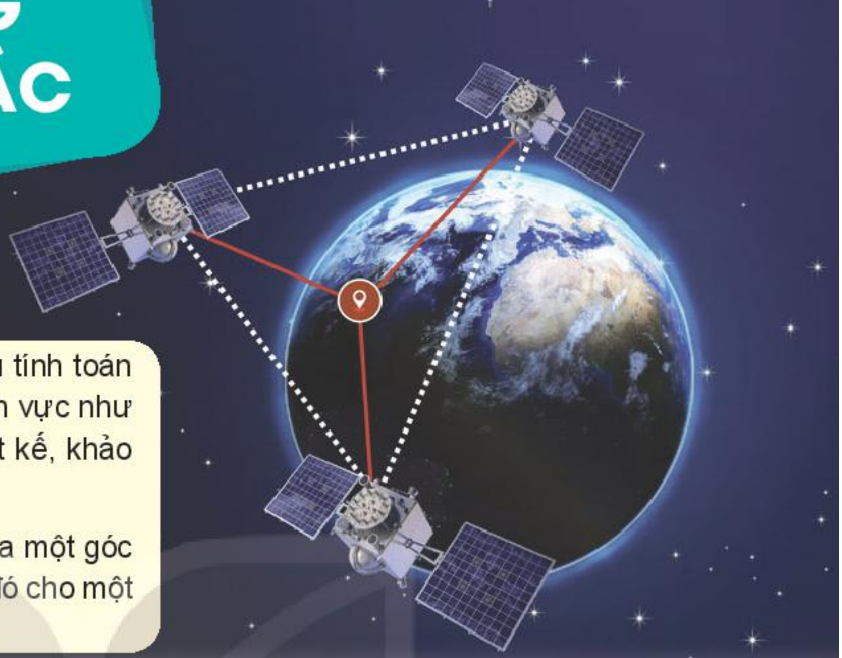
2.16. Một công ty dự định chi tối đa 160 triệu đồng cho quảng cáo một sản phẩm mới trong một tháng trên các đài phát thanh và truyền hình. Biết cùng một thời lượng quảng cáo, số người mới quan tâm đến sản phẩm trên truyền hình gấp 8 lần trên đài phát thanh, tức là quảng cáo trên truyền hình có hiệu quả gấp 8 lần trên đài phát thanh.

Đài phát thanh chỉ nhận các quảng cáo có tổng thời lượng trong một tháng tối đa là 900 giây với chi phí là 80 nghìn đồng/giây. Đài truyền hình chỉ nhận các quảng cáo có tổng thời lượng trong một tháng tối đa là 360 giây với chi phí là 400 nghìn đồng/giây.

Công ty cần đặt thời gian quảng cáo trên các đài phát thanh và truyền hình như thế nào để hiệu quả nhất?

Gợi ý. Nếu coi hiệu quả khi quảng cáo 1 giây trên đài phát thanh là 1 (đơn vị) thì hiệu quả khi quảng cáo 1 giây trên đài truyền hình là 8 (đơn vị). Khi đó hiệu quả quảng cáo x (giây) trên đài phát thanh và y (giây) trên truyền hình là $F(x, y) = x + 8y$. Ta cần tìm giá trị lớn nhất của hàm $F(x, y)$ với x, y thoả mãn các điều kiện trong đề bài.

CHƯƠNG III
HỆ THỨC LƯỢNG TRONG TAM GIÁC



Lượng giác được phát triển từ nhu cầu tính toán góc và khoảng cách trong rất nhiều lĩnh vực như thiên văn học, lập bản đồ, bản vẽ thiết kế, khảo sát và tìm tầm bắn của pháo binh.

Ở lớp 9, em đã biết tỉ số lượng giác của một góc nhọn. Chương này mở rộng khái niệm đó cho một góc bất kì từ 0° đến 180°.

Bài 5 GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC CỦA MỘT GÓC TỪ 0° ĐẾN 180°

THUẬT NGỮ

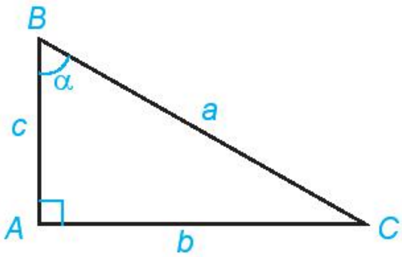
- Giá trị lượng giác của một góc
- Hai góc bù nhau

KIẾN THỨC, KĨ NĂNG

- Nhận biết giá trị lượng giác của một góc từ 0° đến 180°.
- Giải thích hệ thức liên hệ giữa các giá trị lượng giác của hai góc phụ nhau, bù nhau.
- Sử dụng máy tính cầm tay để tính các giá trị lượng giác của một góc.
- Vận dụng giải một số bài toán có nội dung thực tiễn.

$\sin\alpha = \dfrac{b}{a}$ $\cos\alpha = \dfrac{c}{a}$

$\tan\alpha = \dfrac{b}{c}$ $\cot\alpha = \dfrac{c}{b}$



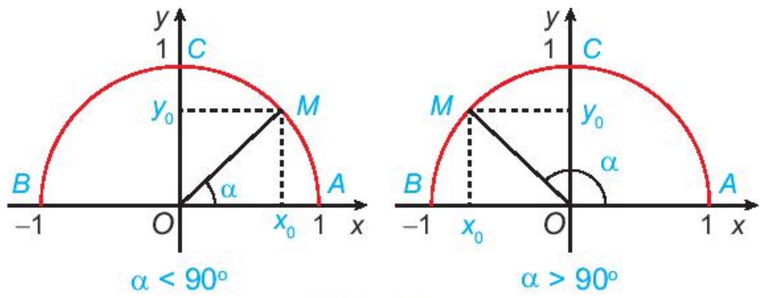
Hình 3.1

Bạn đã biết tỉ số lượng giác của một góc nhọn. Đối với góc tù thì sao?

1. GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC CỦA MỘT GÓC

Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, nửa đường tròn tâm O, bán kính $R = 1$ nằm phía trên trục hoành (H.3.2) được gọi là nửa đường tròn đơn vị.

Cho trước một góc α, $0^\circ \le \alpha \le 180^\circ$. Khi đó, có duy nhất điểm $M(x_0; y_0)$ trên nửa đường tròn đơn vị nói trên để $\widehat{xOM} = \alpha$.



Hình 3.2

HĐ1. a) Nêu nhận xét về vị trí của điểm M trên nửa đường tròn đơn vị trong mỗi trường hợp sau:

- $\alpha = 90^\circ$;
- $\alpha < 90^\circ$;
- $\alpha > 90^\circ$.

b) Khi $0^\circ < \alpha < 90^\circ$, nêu mối quan hệ giữa $\cos\alpha$, $\sin\alpha$ với hoành độ và tung độ của điểm M.

Mở rộng khái niệm tỉ số lượng giác của một góc nhọn cho một góc bất kì từ 0° đến 180°, ta có định nghĩa sau:

Với mỗi góc α ($0^\circ \le \alpha \le 180^\circ$), gọi $M(x_0; y_0)$ là điểm trên nửa đường tròn đơn vị sao cho $\widehat{xOM} = \alpha$. Khi đó:

- sin của góc α là tung độ y_0 của điểm M, được kí hiệu là $\sin\alpha$;
- côsin của góc α là hoành độ x_0 của điểm M, được kí hiệu là $\cos\alpha$;
- Khi $\alpha \ne 90^\circ$ (hay là $x_0 \ne 0$), tang của α là $\dfrac{y_0}{x_0}$, được kí hiệu là $\tan\alpha$;
- Khi $\alpha \ne 0^\circ$ và $\alpha \ne 180^\circ$ (hay là $y_0 \ne 0$), côtang của α là $\dfrac{x_0}{y_0}$, được kí hiệu là $\cot\alpha$.

Từ định nghĩa trên, ta có:

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\ (\alpha \ne 90^\circ);\ \cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\ (\alpha \ne 0^\circ \text{ và } \alpha \ne 180^\circ);\ \tan\alpha = \frac{1}{\cot\alpha}\ (\alpha \notin \{0^\circ; 90^\circ; 180^\circ\}).$$

Sau đây là bảng giá trị lượng giác (GTLG) của một số góc đặc biệt mà em nên nhớ.

GTLG \ α	0°	30°	45°	60°	90°	180°
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	–1
$\tan\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\parallel$	0
$\cot\alpha$	$\parallel$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$\parallel$

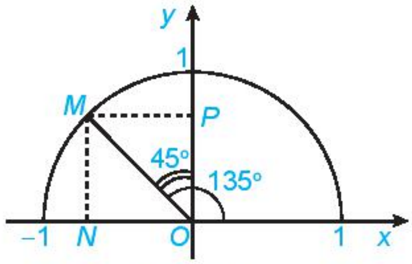
Bảng 3.1

Trong bảng, kí hiệu || chỉ giá trị lượng giác tương ứng không xác định.

Ví dụ 1. Tìm các giá trị lượng giác của góc 135°.

Giải (H.3.3)

Gọi M là điểm trên nửa đường tròn đơn vị sao cho $\widehat{xOM} = 135^\circ$. Gọi N, P tương ứng là hình chiếu vuông góc của M lên các trục Ox, Oy.



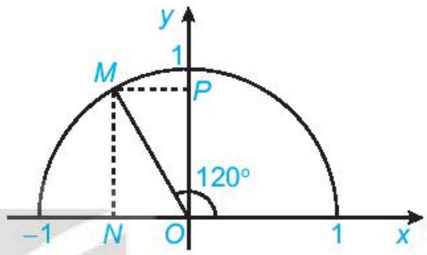
Hình 3.3

Vì $\widehat{xOM} = 135^\circ$ nên $\widehat{MON} = 45^\circ$, $\widehat{MOP} = 45^\circ$. Vậy các tam giác MON, MOP là vuông cân với cạnh huyền $OM = 1$. Từ đó, ta có $ON = OP = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$. Mặt khác, điểm M nằm bên trái trục tung nên có toạ độ là $\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}; \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

Theo định nghĩa, ta có:

$\sin 135^\circ = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$; $\qquad \cos 135^\circ = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$;

$\tan 135^\circ = -1$; $\qquad \cot 135^\circ = -1$.



Hình 3.4

Luyện tập 1. Tìm các giá trị lượng giác của góc 120° (H.3.4).

Ta có thể sử dụng máy tính cầm tay để tính (đúng hoặc gần đúng) các giá trị lượng giác của một góc và tính góc khi biết giá trị lượng giác của góc đó.

Chẳng hạn, với một loại máy tính cầm tay, sau khi mở máy ta bấm phím [SHIFT] [MODE] (SETUP) rồi bấm phím [3] để chọn đơn vị đo góc là "độ". Sau đó tính giá trị lượng giác của góc hoặc tính góc khi biết giá trị lượng giác của góc đó.

- Tính giá trị lượng giác của một số góc:

Tính	Bấm phím	Kết quả
$\sin 48^\circ 50' 40''$	[sin] [4] [8] [°' "] [5] [0] [°' "] [4] [0] [°' "] [=]	$\sin 48^\circ 50' 40'' \approx 0{,}7529256291$
$\cos 112^\circ 12' 45''$	[cos] [1] [1] [2] [°' "] [1] [2] [°' "] [4] [5] [°' "] [=]	$\cos 112^\circ 12' 45'' \approx -0{,}3780427715$
$\tan 15^\circ$	[tan] [1] [5] [=]	$\tan 15^\circ = 2 - \sqrt{3}$

- Tìm góc khi biết một giá trị lượng giác của góc đó:

Tìm x, biết	Bấm phím	Kết quả
$\sin x = 0{,}3456$	[SHIFT] [sin] ($\sin^{-1}$) [0] [•] [3] [4] [5] [6] [=] [°' "]	$x \approx 20^\circ 13' 7''$

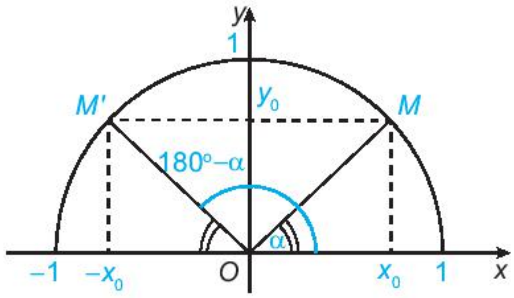
Chú ý

- Khi tìm x biết $\sin x$, máy tính chỉ đưa ra giá trị $x \leq 90^\circ$.
- Muốn tìm x khi biết $\cos x$, $\tan x$, ta cũng làm tương tự như trên, chỉ thay phím [sin] tương ứng bởi phím [cos], [tan].

2. MỐI QUAN HỆ GIỮA CÁC GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC CỦA HAI GÓC BÙ NHAU

Ở lớp 9, em đã biết mối quan hệ giữa tỉ số lượng giác của hai góc phụ nhau. Trong mục này, em hãy tìm mối quan hệ giữa các giá trị lượng giác của hai góc bù nhau.

Đối với một góc α tuỳ ý ($0^\circ \le \alpha \le 180^\circ$), gọi M, M' là hai điểm trên nửa đường tròn đơn vị tương ứng với hai góc bù nhau α và $180^\circ - \alpha$ ($\widehat{xOM} = \alpha$, $\widehat{xOM'} = 180^\circ - \alpha$) (H.3.5).



Hình 3.5

HĐ2. Nêu nhận xét về vị trí của hai điểm M, M' đối với trục Oy. Từ đó, nêu các mối quan hệ giữa $\sin\alpha$ và $\sin(180^\circ - \alpha)$, giữa $\cos\alpha$ và $\cos(180^\circ - \alpha)$.

Đối với hai góc bù nhau, α và $180^\circ - \alpha$, ta có:

- $\sin(180^\circ - \alpha) = \sin\alpha$;
- $\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos\alpha$;
- $\tan(180^\circ - \alpha) = -\tan\alpha$ ($\alpha \ne 90^\circ$);
- $\cot(180^\circ - \alpha) = -\cot\alpha$ ($0^\circ < \alpha < 180^\circ$).

Ví dụ 2. Tính các giá trị lượng giác của các góc $120^\circ, 135^\circ, 150^\circ$.

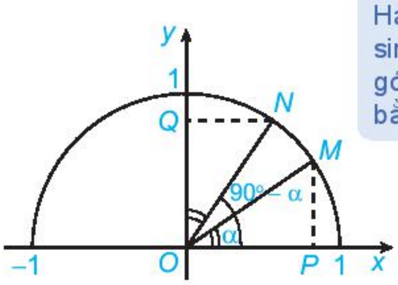
Giải

Do các góc $120^\circ, 135^\circ, 150^\circ$ tương ứng bù với các góc $60^\circ, 45^\circ, 30^\circ$ nên từ Bảng 3.1, ta cũng có bảng các giá trị lượng giác sau:

GTLG \ α	120°	135°	150°
$\sin\alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\cos\alpha$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\tan\alpha$	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$
$\cot\alpha$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$

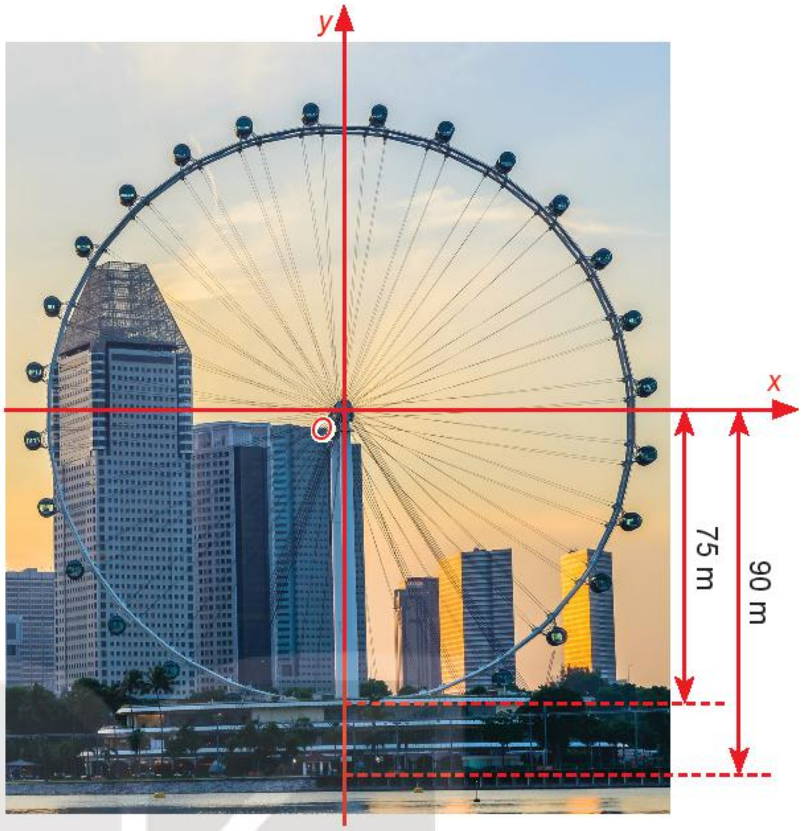
Bảng 3.2

Luyện tập 2. Trong Hình 3.6, hai điểm M, N ứng với hai góc phụ nhau α và $90^\circ - \alpha$ ($\widehat{xOM} = \alpha$, $\widehat{xON} = 90^\circ - \alpha$). Chứng minh rằng $\Delta MOP = \Delta NOQ$. Từ đó nêu mối quan hệ giữa $\cos\alpha$ và $\sin(90^\circ - \alpha)$.



Hình 3.6

Vận dụng. Một chiếc đu quay có bán kính 75 m, tâm của vòng quay ở độ cao 90 m (H.3.7), thời gian thực hiện mỗi vòng quay của đu quay là 30 phút. Nếu một người vào cabin tại vị trí thấp nhất của vòng quay, thì sau 20 phút quay, người đó ở độ cao bao nhiêu mét?



Hình 3.7

BÀI TẬP

3.1. Không dùng bảng số hay máy tính cầm tay, tính giá trị của các biểu thức sau:

a) $\left(2\sin 30^\circ + \cos 135^\circ - 3\tan 150^\circ\right)\cdot\left(\cos 180^\circ - \cot 60^\circ\right)$;

b) $\sin^2 90^\circ + \cos^2 120^\circ + \cos^2 0^\circ - \tan^2 60^\circ + \cot^2 135^\circ$;

c) $\cos 60^\circ \cdot \sin 30^\circ + \cos^2 30^\circ$.

Chú ý. $\sin^2\alpha = (\sin\alpha)^2$, $\cos^2\alpha = (\cos\alpha)^2$, $\tan^2\alpha = (\tan\alpha)^2$, $\cot^2\alpha = (\cot\alpha)^2$.

3.2. Đơn giản các biểu thức sau:

a) $\sin 100^\circ + \sin 80^\circ + \cos 16^\circ + \cos 164^\circ$;

b) $2\sin\left(180^\circ - \alpha\right)\cdot\cot\alpha - \cos\left(180^\circ - \alpha\right)\cdot\tan\alpha\cdot\cot\left(180^\circ - \alpha\right)$, với $0^\circ < \alpha < 90^\circ$.

3.3. Chứng minh các hệ thức sau:

a) $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$;

b) $1 + \tan^2\alpha = \dfrac{1}{\cos^2\alpha}$ $(\alpha \neq 90^\circ)$;

c) $1 + \cot^2\alpha = \dfrac{1}{\sin^2\alpha}$ $(0^\circ < \alpha < 180^\circ)$.

3.4. Cho góc α $(0^\circ < \alpha < 180^\circ)$ thoả mãn $\tan\alpha = 3$.

Tính giá trị của biểu thức: $P = \dfrac{2\sin\alpha - 3\cos\alpha}{3\sin\alpha + 2\cos\alpha}$.

Bài 6

HỆ THỨC LƯỢNG TRONG TAM GIÁC

THUẬT NGỮ

- Định lí côsin
- Định lí sin
- Công thức tính diện tích
- Giải tam giác

KIẾN THỨC, KĨ NĂNG

- Hiểu Định lí côsin, Định lí sin, công thức tính diện tích tam giác.
- Giải tam giác và giải quyết một số bài toán trong đo đạc.

Ngắm Tháp Rùa từ bờ, chỉ với những dụng cụ đơn giản, dễ chuẩn bị, ta cũng có thể xác định được khoảng cách từ vị trí ta đứng tới Tháp Rùa. Em có biết vì sao?

Tháp Rùa nằm trong lòng hồ Hoàn Kiếm ở Thủ đô Hà Nội

1. ĐỊNH LÍ CÔSIN

HĐ1. Một tàu biển xuất phát từ cảng Vân Phong (Khánh Hoà) theo hướng đông với vận tốc 20 km/h. Sau khi đi được 1 giờ, tàu chuyển sang hướng đông nam rồi giữ nguyên vận tốc và đi tiếp.

a) Hãy vẽ sơ đồ đường đi của tàu trong 1,5 giờ kể từ khi xuất phát (1 km trên thực tế ứng với 1 cm trên bản vẽ).

b) Hãy đo trực tiếp trên bản vẽ và cho biết sau 1,5 giờ kể từ khi xuất phát, tàu cách cảng Vân Phong bao nhiêu kilômét (số đo gần đúng).

c) Nếu sau khi đi được 2 giờ, tàu chuyển sang hướng nam (thay vì hướng đông nam) thì có thể dùng Định lí Pythagore (Pi-ta-go) để tính chính xác các số đo trong câu b hay không?

Đối với tam giác ABC, ta thường kí hiệu A, B, C là các góc của tam giác tại đỉnh tương ứng; a, b, c tương ứng là độ dài của các cạnh đối diện với đỉnh A, B, C; p là nửa chu vi; S là diện tích; R, r tương ứng là bán kính đường tròn ngoại tiếp, nội tiếp tam giác.

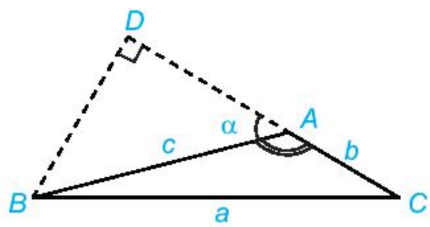
HĐ2. Trong Hình 3.8, hãy thực hiện các bước sau để thiết lập công thức tính a theo b, c và giá trị lượng giác của góc A.

a) Tính a^2 theo BD^2 và CD^2.

b) Tính a^2 theo b, c và DA.

c) Tính DA theo c và $\cos A$.

d) Chứng minh $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$.



Hình 3.8

Chú ý. Người ta chứng minh được kết quả trong HĐ2d đối với cả các trường hợp góc A là góc vuông hoặc nhọn.

Định lí côsin. Trong tam giác ABC:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A,$$
$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca\cos B,$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C.$$

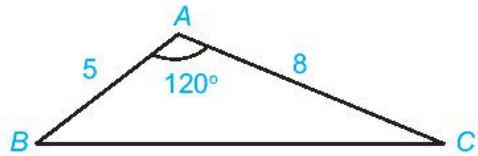
Định lí Pythagore có phải là một trường hợp đặc biệt của Định lí côsin hay không?

Ví dụ 1. Cho tam giác ABC có $\widehat{A} = 120^\circ$ và $AB = 5$, $AC = 8$. Tính độ dài cạnh BC.

Giải (H.3.9)

Áp dụng Định lí côsin cho tam giác ABC, ta có:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos 120^\circ$$
$$= 5^2 + 8^2 - 2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = 129. \text{ Vậy } BC = \sqrt{129}.$$



Hình 3.9

Khám phá. Từ Định lí côsin, hãy viết các công thức tính $\cos A$, $\cos B$, $\cos C$ theo độ dài các cạnh a, b, c của tam giác ABC.

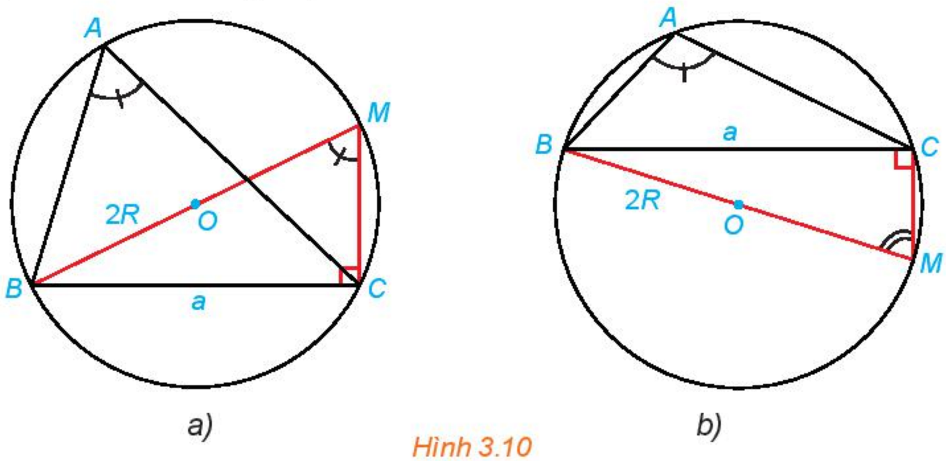
Luyện tập 1. Cho tam giác ABC có $AB = 5$, $AC = 8$ và $\widehat{A} = 45^\circ$. Tính độ dài các cạnh và độ lớn các góc còn lại của tam giác.

Trải nghiệm. Vẽ một tam giác ABC, sau đó đo độ dài các cạnh, số đo góc A và kiểm tra tính đúng đắn của Định lí côsin tại đỉnh A đối với tam giác đó.

Vận dụng 1. Dùng Định lí côsin, tính khoảng cách được đề cập trong HĐ1b.

2. ĐỊNH LÍ SIN

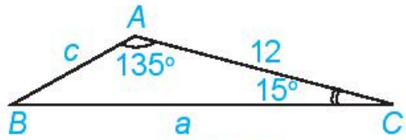
HĐ3. Trong mỗi hình dưới đây, hãy tính R theo a và $\sin A$.



Hình 3.10

Định lí sin. Trong tam giác ABC: $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C} = 2R.$

Ví dụ 2. Cho tam giác ABC có $\widehat{A}=135^\circ$, $\widehat{C}=15^\circ$ và $b=12$. Tính a, c, R và số đo góc B.



Hình 3.11

Giải (H.3.11)

Ta có: $\widehat{B}=180^\circ-(\widehat{A}+\widehat{C})=180^\circ-(135^\circ+15^\circ)=30^\circ$.

Áp dụng Định lí sin, ta có: $\dfrac{a}{\sin 135^\circ}=\dfrac{12}{\sin 30^\circ}=\dfrac{c}{\sin 15^\circ}=2R$.

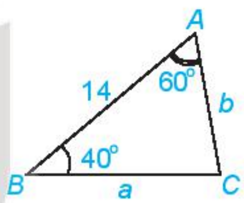
Suy ra $a=\dfrac{12}{\sin 30^\circ}\cdot\sin 135^\circ=12\sqrt{2}$; $c=\dfrac{12}{\sin 30^\circ}\cdot\sin 15^\circ=24\sin 15^\circ\,(\approx 6{,}21)$; $R=\dfrac{12}{2\sin 30^\circ}=12$.

Luyện tập 2. Cho tam giác ABC có $b=8$, $c=5$ và $\widehat{B}=80^\circ$. Tính số đo các góc, bán kính đường tròn ngoại tiếp và độ dài cạnh còn lại của tam giác.

3. GIẢI TAM GIÁC VÀ ỨNG DỤNG THỰC TẾ

Việc tính độ dài các cạnh và số đo các góc của một tam giác khi biết một số yếu tố của tam giác đó được gọi là giải tam giác.

Ví dụ 3. Giải tam giác ABC, biết $c=14, \widehat{A}=60^\circ, \widehat{B}=40^\circ$.



Giải

Ta có $\widehat{C}=180^\circ-(\widehat{A}+\widehat{B})=80^\circ$.

Áp dụng Định lí sin ta có: $\dfrac{a}{\sin 60^\circ}=\dfrac{b}{\sin 40^\circ}=\dfrac{14}{\sin 80^\circ}$.

Suy ra $a=\dfrac{14\sin 60^\circ}{\sin 80^\circ}\approx 12{,}31$; $b=\dfrac{14\sin 40^\circ}{\sin 80^\circ}\approx 9{,}14$.

Luyện tập 3. Giải tam giác ABC, biết $b=32, c=45, \widehat{A}=87^\circ$.

Chú ý. Áp dụng các Định lí côsin, sin và sử dụng máy tính cầm tay, ta có thể tính (gần đúng) các cạnh và các góc của một tam giác trong các trường hợp sau:

- Biết hai cạnh và góc xen giữa;
- Biết ba cạnh;
- Biết một cạnh và hai góc kề.

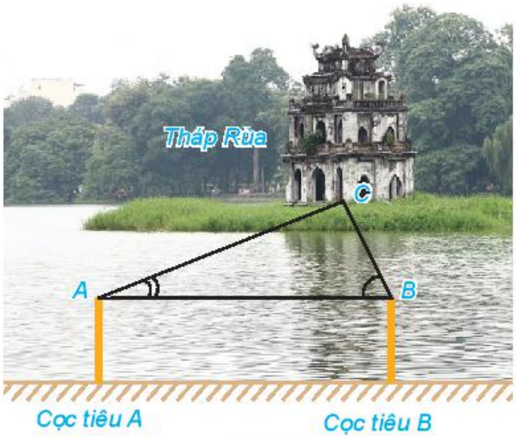
Ví dụ 4. Trở lại *tình huống mở đầu,* theo các bước sau, ta có thể tiến hành đo khoảng cách từ vị trí A trên bờ hồ Hoàn Kiếm đến Tháp Rùa (H.3.12):

Bước 1. Trên bờ, đặt một cọc tiêu tại vị trí A và một cọc tiêu tại vị trí B nào đó. Đo khoảng cách AB.

Bước 2. Đứng tại A, ngắm Tháp Rùa và cọc tiêu B để đo góc tạo bởi hai hướng ngắm đó.

Bước 3. Đứng tại B, ngắm cọc tiêu A và Tháp Rùa để đo góc tạo bởi hai hướng ngắm đó.

Bước 4. Gọi C là vị trí của Tháp Rùa. Áp dụng Định lí sin cho tam giác ABC để tính độ dài cạnh AC.

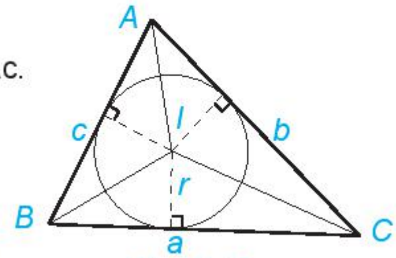


Hình 3.12

Vận dụng 2. Từ một khu vực có thể quan sát được hai đỉnh núi, ta có thể ngắm và đo để xác định khoảng cách giữa hai đỉnh núi đó. Hãy thảo luận để đưa ra các bước cho một cách đo.

4. CÔNG THỨC TÍNH DIỆN TÍCH TAM GIÁC

Ta đã biết tính diện tích một tam giác theo chiều cao và độ dài cạnh đáy tương ứng. Liệu còn công thức nào khác để tính diện tích tam giác hay không?



Hình 3.13

HĐ4. Cho tam giác *ABC* với *I* là tâm đường tròn nội tiếp tam giác.

a) Nêu mối liên hệ giữa diện tích tam giác *ABC* và diện tích các tam giác *IBC*, *ICA*, *IAB*.

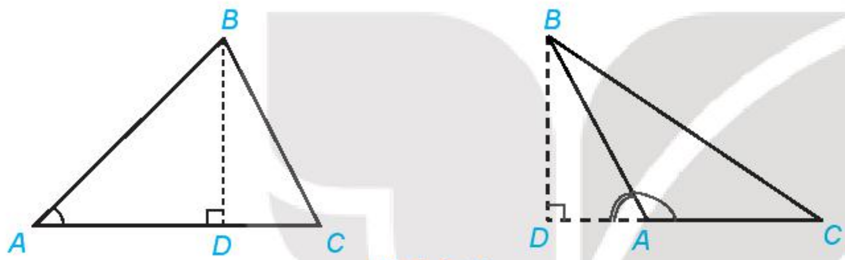
b) Tính diện tích tam giác *ABC* theo *r*, *a*, *b*, *c*.

> Công thức tính diện tích tam giác *ABC*: $S = pr = \dfrac{(a+b+c)r}{2}$.

HĐ5. Cho tam giác *ABC* với đường cao *BD*.

a) Biểu thị *BD* theo *AB* và sin *A*.

b) Viết công thức tính diện tích *S* của tam giác *ABC* theo *b*, *c*, sin *A*.

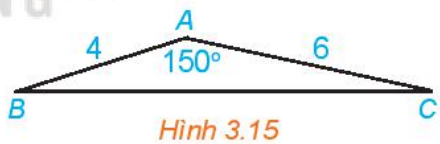


Hình 3.14

> Công thức tính diện tích tam giác *ABC*: $S = \dfrac{1}{2}bc\sin A = \dfrac{1}{2}ca\sin B = \dfrac{1}{2}ab\sin C$.

Ví dụ 5. Tính diện tích *S* của tam giác *ABC* có $c = 4$, $b = 6$, $\widehat{A} = 150^\circ$.

Giải (H.3.15)



Hình 3.15

Ta có: $S = \dfrac{1}{2}bc\sin A = \dfrac{1}{2}\cdot 6\cdot 4\cdot \sin 150^\circ = 6$.

Luyện tập 4. Tính diện tích của tam giác *ABC* có $b = 2$, $\widehat{B} = 30^\circ$, $\widehat{C} = 45^\circ$.

Chú ý. Do $\sin A = \dfrac{a}{2R}$ nên từ công thức $S = \dfrac{1}{2}bc\sin A$, ta có:

> Công thức tính diện tích tam giác *ABC*: $S = \dfrac{abc}{4R}$.

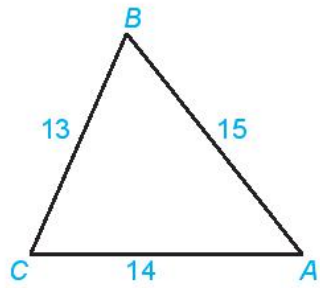
Thảo luận. Ta đã biết tính cos *A* theo độ dài các cạnh của tam giác *ABC*. Liệu sin *A* và diện tích *S* có tính được theo độ dài các cạnh của tam giác *ABC* hay không?

> **Công thức Heron.** Trong tam giác *ABC*: $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$.

Ví dụ 6. Cho tam giác *ABC* có *a* = 13, *b* = 14, *c* = 15.

a) Tính sin *A*.

b) Tính diện tích *S* bằng hai cách khác nhau.



Hình 3.16

Giải (H.3.16)

a) Áp dụng Định lí côsin, ta có:

$$\cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} = \frac{14^2+15^2-13^2}{420} = 0{,}6.$$

Do đó $\sin A = \sqrt{1-\cos^2 A} = 0{,}8.$

b) Ta có $S = \frac{1}{2}bc\sin A = 84.$

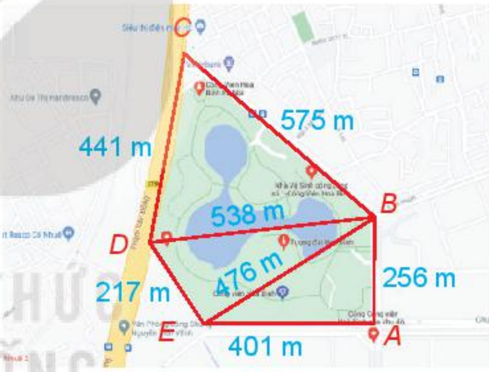
Áp dụng Công thức Heron, ta cũng có thể tính *S* theo cách thứ hai sau:

Tam giác ABC có nửa chu vi là: $p = \frac{a+b+c}{2} = \frac{13+14+15}{2} = 21.$

Khi đó

$$S_{ABC} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{21\cdot(21-13)\cdot(21-14)\cdot(21-15)} = \sqrt{21\cdot 8\cdot 7\cdot 6} = 84.$$

Vận dụng 3. Công viên Hoà Bình (Hà Nội) có dạng hình ngũ giác *ABCDE* như Hình 3.17. Dùng chế độ tính khoảng cách giữa hai điểm của Google Maps, một người xác định được các khoảng cách như trong hình vẽ. Theo số liệu đó, em hãy tính diện tích của công viên Hoà Bình.



Hình 3.17

BÀI TẬP

3.5. Cho tam giác *ABC* có $a = 6$, $b = 5$, $c = 8$. Tính cos *A*, *S*, *r*.

3.6. Cho tam giác *ABC* có $a = 10$, $\widehat{A} = 45^\circ$, $\widehat{B} = 70^\circ$. Tính *R*, *b*, *c*.

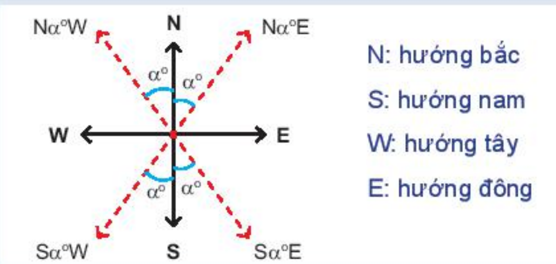
3.7. Giải tam giác *ABC* và tính diện tích của tam giác đó, biết $\widehat{A} = 15^\circ$, $\widehat{B} = 130^\circ$, $c = 6$.

3.8. Một tàu đánh cá xuất phát từ cảng *A*, đi theo hướng *S*70°E với vận tốc 70 km/h. Đi được 90 phút thì động cơ của tàu bị hỏng nên tàu trôi tự do theo hướng nam với vận tốc 8 km/h. Sau 2 giờ kể từ khi động cơ bị hỏng, tàu neo đậu được vào một hòn đảo.

a) Tính khoảng cách từ cảng *A* tới đảo nơi tàu neo đậu.

b) Xác định hướng từ cảng *A* tới đảo nơi tàu neo đậu.

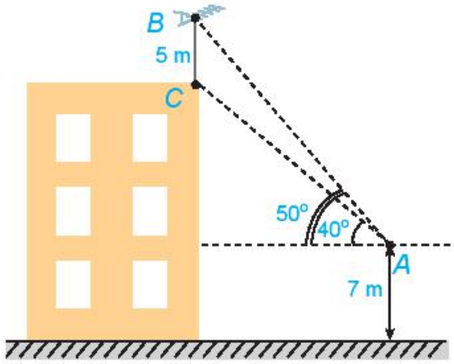
Hướng Sα°E là hướng tạo với hướng nam góc α° và tạo với hướng đông góc 90° – α°. Các hướng Sα°W, Nα°E, Nα°W cũng được định nghĩa một cách tương tự.



3.9. Trên nóc một toà nhà có một cột ăng-ten cao 5 m. Từ một vị trí quan sát A cao 7 m so với mặt đất có thể nhìn thấy đỉnh B và chân C của cột ăng-ten, với các góc tương ứng là 50° và 40° so với phương nằm ngang (H.3.18).

a) Tính các góc của tam giác ABC.

b) Tính chiều cao của toà nhà.

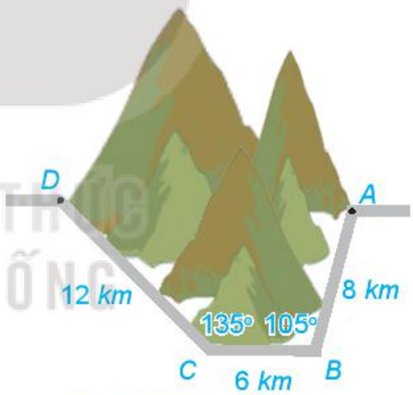


Hình 3.18

3.10. Từ bãi biển Vũng Chùa, Quảng Bình, ta có thể ngắm được Đảo Yến. Hãy đề xuất một cách xác định bề rộng của hòn đảo (theo chiều ta ngắm được).

Đảo Yến, nhìn từ bãi biển Vũng Chùa, Quảng Bình

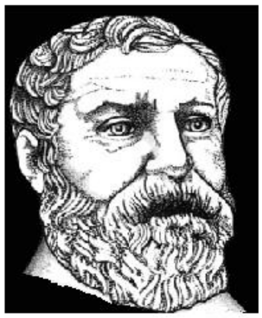
3.11. Để tránh núi, đường giao thông hiện tại phải đi vòng như mô hình trong Hình 3.19. Để rút ngắn khoảng cách và tránh sạt lở núi, người ta dự định làm đường hầm xuyên núi, nối thẳng từ A tới D. Hỏi độ dài đường mới sẽ giảm bao nhiêu kilômét so với đường cũ?



Hình 3.19

Em có biết?

Heron (Heron of Alexandria) là một nhà phát minh, nhà toán học Hy Lạp, sống vào khoảng thế kỉ I. Mặc dù cỗ máy với động cơ hơi nước đầu tiên trên thế giới ra đời ở thế kỉ XVIII – một sự kiện quan trọng góp phần tạo nên cuộc cách mạng công nghiệp lần thứ nhất, nhưng chính Heron là người đầu tiên mô tả một mô hình đơn giản cho phép biến hơi nước thành chuyển động quay. Trong toán học, Heron mô tả cách tính diện tích của các đa giác đều từ 3 tới 12 cạnh, diện tích một số mặt và thể tích một số hình trong không gian.



Heron of Alexandria

(Theo *https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Heron/*)

BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG III

A – TRẮC NGHIỆM

3.12. Cho tam giác ABC có $\widehat{B} = 135^\circ$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

a) A. $S = \frac{1}{2}ca$. B. $S = \frac{-\sqrt{2}}{4}ac$. C. $S = \frac{\sqrt{2}}{4}bc$. D. $S = \frac{\sqrt{2}}{4}ca$.

b) A. $R = \frac{a}{\sin A}$. B. $R = \frac{\sqrt{2}}{2}b$. C. $R = \frac{\sqrt{2}}{2}c$. D. $R = \frac{\sqrt{2}}{2}a$.

c) A. $a^2 = b^2 + c^2 + \sqrt{2}ab$. B. $\frac{b}{\sin A} = \frac{a}{\sin B}$.

C. $\sin B = \frac{-\sqrt{2}}{2}$. D. $b^2 = c^2 + a^2 - 2ca\cos 135^\circ$.

3.13. Cho tam giác ABC. Khẳng định nào sau đây là đúng?

a) A. $S = \frac{abc}{4r}$. B. $r = \frac{2S}{a+b+c}$.

C. $a^2 = b^2 + c^2 + 2bc\cos A$. D. $S = r(a+b+c)$.

b) A. $\sin A = \sin(B+C)$. B. $\cos A = \cos(B+C)$.

C. $\cos A > 0$. D. $\sin A \leq 0$.

B – TỰ LUẬN

3.14. Tính giá trị của các biểu thức sau:

a) $M = \sin 45^\circ \cdot \cos 45^\circ + \sin 30^\circ$; b) $N = \sin 60^\circ \cdot \cos 30^\circ + \frac{1}{2}\sin 45^\circ \cdot \cos 45^\circ$;

c) $P = 1 + \tan^2 60^\circ$; d) $Q = \frac{1}{\sin^2 120^\circ} - \cot^2 120^\circ$.

3.15. Cho tam giác ABC có $\widehat{B} = 60^\circ$, $\widehat{C} = 45^\circ$, $AC = 10$. Tính a, R, S, r.

3.16. Cho tam giác ABC có trung tuyến AM. Chứng minh rằng:

a) $\cos\widehat{AMB} + \cos\widehat{AMC} = 0$;

b) $MA^2 + MB^2 - AB^2 = 2MA \cdot MB \cdot \cos\widehat{AMB}$ và $MA^2 + MC^2 - AC^2 = 2MA \cdot MC \cdot \cos\widehat{AMC}$;

c) $MA^2 = \frac{2(AB^2 + AC^2) - BC^2}{4}$ (công thức đường trung tuyến).

3.17. Cho tam giác ABC. Chứng minh rằng:

a) Nếu góc A nhọn thì $b^2 + c^2 > a^2$;

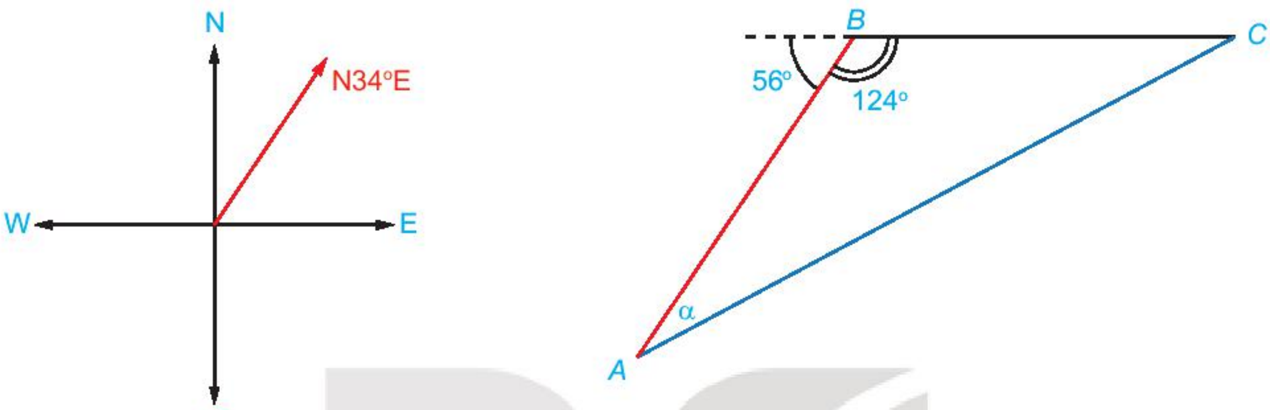
b) Nếu góc A tù thì $b^2 + c^2 < a^2$;

c) Nếu góc A vuông thì $b^2 + c^2 = a^2$.

3.18. Trên biển, tàu *B* ở vị trí cách tàu *A* 53 km về hướng N34°E. Sau đó, tàu *B* chuyển động thẳng đều với vận tốc có độ lớn 30 km/h về hướng đông và tàu *A* chuyển động thẳng đều với vận tốc có độ lớn 50 km/h để đuổi kịp tàu *B*.

a) Hỏi tàu A cần phải chuyển động theo hướng nào?

b) Với hướng chuyển động đó thì sau bao lâu tàu *A* đuổi kịp tàu *B*?



Hình 3.20

3.19. Trên sân bóng chày dành cho nam, các vị trí gôn Nhà (Home plate), gôn 1 (First base), gôn 2 (Second base), gôn 3 (Third base) là bốn đỉnh của một hình vuông có cạnh dài 27,4 m. Vị trí đứng ném bóng (Pitcher's mound) nằm trên đường nối gôn Nhà với gôn 2, và cách gôn Nhà 18,44 m. Tính các khoảng cách từ vị trí đứng ném bóng tới các gôn 1 và gôn 3.

Hình 3.21

CHƯƠNG IV. VECTƠ

Hình 4.1 cho thấy ga An Cựu cách Hoàng cung Huế 3,01 km về hướng đông nam. Hai thông tin khoảng cách và hướng cho phép ta xác định được vị trí của ga An Cựu theo vị trí của Hoàng cung Huế.

Hình 4.1 (Theo Google Maps)

Một số đại lượng như lực, vận tốc cũng được đặc trưng bởi hai yếu tố là độ lớn và hướng. Chương này xây dựng một đối tượng toán học, được gọi là vectơ, mà ta có thể dùng nó để biểu diễn các đại lượng nói trên.

Vectơ còn được sử dụng để xây dựng các khái niệm toán học, là công cụ để giải quyết nhiều bài toán và góp phần vào việc hình thành và phát triển năng lực tư duy tuyến tính cho người học.

Bài 7 CÁC KHÁI NIỆM MỞ ĐẦU

THUẬT NGỮ

- Vectơ
- Vectơ-không
- Độ dài của vectơ
- Hai vectơ cùng phương
- Hai vectơ cùng hướng
- Hai vectơ bằng nhau

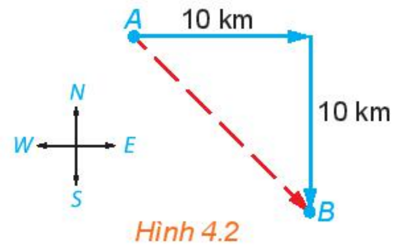
KIẾN THỨC, KĨ NĂNG

- Nhận biết khái niệm vectơ, hai vectơ cùng phương, hai vectơ cùng hướng, hai vectơ bằng nhau, vectơ-không.
- Biểu thị một số đại lượng như lực, vận tốc bằng vectơ.

Nhiệt độ và gió là hai yếu tố luôn cùng được đề cập trong các bản tin dự báo thời tiết. Tuy nhiên, nhiệt độ là đại lượng chỉ có độ lớn, còn gió có cả hướng và độ lớn. Với một đơn vị đo, ta có thể dùng số để biểu diễn nhiệt độ. Đối với các đại lượng gồm hướng và độ lớn như vận tốc gió thì sao? Ta có thể dùng đối tượng toán học nào để biểu diễn chúng?

1. KHÁI NIỆM VECTƠ

HĐ1. Một con tàu khởi hành từ đảo A, đi thẳng về hướng đông 10 km rồi đi thẳng tiếp 10 km về hướng nam thì tới đảo B (H.4.2). Nếu từ đảo A, tàu đi thẳng (không đổi hướng) tới đảo B, thì phải đi theo hướng nào và quãng đường phải đi dài bao nhiêu kilômét?



Hình 4.2

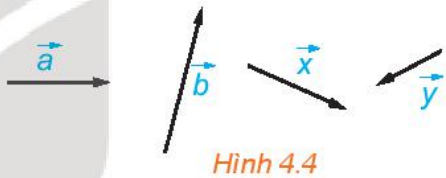
Ta có thể gắn cho quãng đường thẳng từ đảo A tới đảo B đồng thời hai yếu tố, đó là độ dài và hướng (hướng đi thẳng từ đảo A tới đảo B). Từ thực tế này, ta đi tới khái niệm toán học sau:

- Vectơ là một đoạn thẳng có hướng, nghĩa là, trong hai điểm mút của đoạn thẳng, đã chỉ rõ điểm đầu, điểm cuối.
- Độ dài của vectơ là khoảng cách giữa điểm đầu và điểm cuối của vectơ đó.

Chú ý

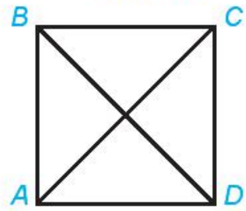
- Vectơ có điểm đầu A và điểm cuối B được kí hiệu là $\overrightarrow{AB}$, đọc là *vectơ AB* (H.4.3).
- Để vẽ một vectơ, ta vẽ đoạn thẳng nối điểm đầu và điểm cuối của nó, rồi đánh dấu mũi tên ở điểm cuối (H.4.3).
- Vectơ còn được kí hiệu là $\vec{a}, \vec{b}, \vec{x}, \vec{y}, \ldots$ (H.4.4).
- Độ dài của vectơ $\overrightarrow{AB}, \vec{a}$ tương ứng được kí hiệu là $|\overrightarrow{AB}|$, $|\vec{a}|$.

Hình 4.3



Hình 4.4

Ví dụ 1. Cho hình vuông $ABCD$ với cạnh có độ dài bằng 1. Tính độ dài các vectơ $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{BD}$.

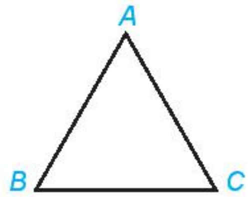


Giải

Vì cạnh của hình vuông $ABCD$ có độ dài bằng 1 nên các đường chéo của hình vuông này có độ dài bằng $\sqrt{2}$.

Vậy $|\overrightarrow{AC}| = AC = \sqrt{2}$, $|\overrightarrow{CA}| = CA = \sqrt{2}$, $|\overrightarrow{BD}| = BD = \sqrt{2}$.

Luyện tập 1. Cho tam giác đều ABC với cạnh có độ dài bằng a. Hãy chỉ ra các vectơ có độ dài bằng a và có điểm đầu, điểm cuối là các đỉnh của tam giác ABC.



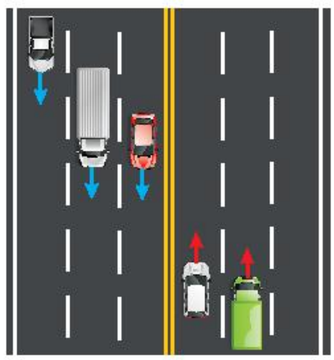
2. HAI VECTƠ CÙNG PHƯƠNG, CÙNG HƯỚNG, BẰNG NHAU

HĐ2. Quan sát các làn đường trong Hình 4.5 và cho biết những nhận xét nào sau đây là đúng.

a) Các làn đường song song với nhau.

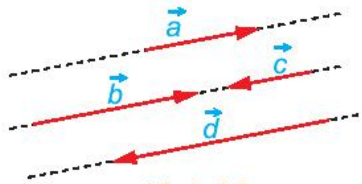
b) Các xe chạy theo cùng một hướng.

c) Hai xe bất kì đều chạy theo cùng một hướng hoặc hai hướng ngược nhau.



Hình 4.5

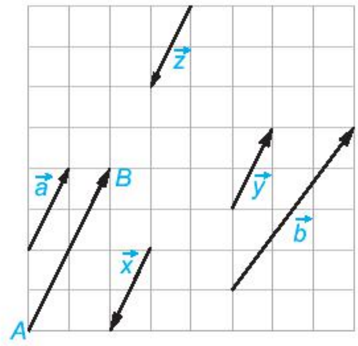
- Đường thẳng đi qua điểm đầu và điểm cuối của một vectơ được gọi là giá của vectơ đó.
- Hai vectơ được gọi là cùng phương nếu chúng có giá song song hoặc trùng nhau.



Hình 4.6

Trong Hình 4.7, mỗi cặp vectơ trong các vectơ $\overrightarrow{AB}$, $\vec{a}$, $\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{z}$ đều cùng phương, nhưng vectơ $\vec{b}$ không cùng phương với mỗi vectơ trên.

HĐ3. Xét các vectơ cùng phương trong Hình 4.7. Hai vectơ $\vec{a}$ và $\overrightarrow{AB}$ được gọi là cùng hướng, còn hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{x}$ được gọi là ngược hướng. Hãy chỉ ra các vectơ cùng hướng với vectơ $\vec{a}$ và các vectơ ngược hướng với vectơ $\vec{a}$.



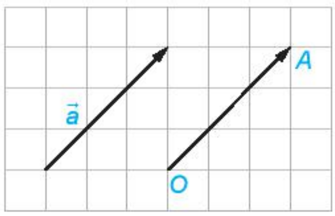
Hình 4.7

Đối với hai vectơ cùng phương thì chúng cùng hướng hoặc ngược hướng.

Hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ được gọi là bằng nhau, kí hiệu $\vec{a} = \vec{b}$, nếu chúng có cùng độ dài và cùng hướng.

Chú ý

- Ta cũng xét các vectơ có điểm đầu và điểm cuối trùng nhau (chẳng hạn $\overrightarrow{AA}$, $\overrightarrow{BB}$, $\overrightarrow{MM}$), gọi là các vectơ-không.
- Ta quy ước vectơ-không có độ dài bằng 0, cùng hướng (do đó cùng phương) với mọi vectơ.
- Các vectơ-không có cùng độ dài và cùng hướng nên bằng nhau và được kí hiệu chung là $\vec{0}$.
- Với mỗi điểm O và vectơ $\vec{a}$ cho trước, có duy nhất điểm A sao cho $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ (H.4.8).

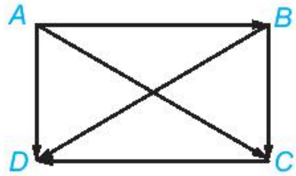


Hình 4.8

Ví dụ 2. Cho hình chữ nhật $ABCD$. Hãy chỉ ra mối quan hệ về độ dài, phương, hướng giữa các cặp vectơ: $\overrightarrow{AD}$ và $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{AC}$ và $\overrightarrow{BD}$. Những cặp vectơ nào trong các cặp vectơ trên là bằng nhau?

Giải (H.4.9)

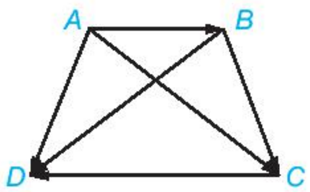
- Hai vectơ $\overrightarrow{AD}$ và $\overrightarrow{BC}$ có cùng độ dài và cùng hướng. Do đó, hai vectơ $\overrightarrow{AD}$ và $\overrightarrow{BC}$ bằng nhau.
- Hai vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{CD}$ có cùng độ dài và ngược hướng. Do đó, hai vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{CD}$ không bằng nhau.
- Hai vectơ $\overrightarrow{AC}$ và $\overrightarrow{BD}$ có cùng độ dài nhưng không cùng phương nên không cùng hướng. Do đó, hai vectơ $\overrightarrow{AC}$ và $\overrightarrow{BD}$ không bằng nhau.



Hình 4.9

Vậy trong các cặp vectơ đang xét, chỉ có cặp vectơ $\overrightarrow{AD}$ và $\overrightarrow{BC}$ là bằng nhau ($\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$).

Luyện tập 2. Cho hình thang cân $ABCD$ với hai đáy AB, CD, $AB < CD$ (H.4.10). Hãy chỉ ra mối quan hệ về độ dài, phương, hướng giữa các cặp vectơ $\overrightarrow{AD}$ và $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{AC}$ và $\overrightarrow{BD}$. Có cặp vectơ nào trong các cặp vectơ trên bằng nhau hay không?



Hình 4.10

Ví dụ 3. Chứng minh rằng ba điểm A, B, C thẳng hàng khi và chỉ khi hai vectơ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ cùng phương.

Giải

- Giả sử ba điểm A, B, C thẳng hàng. Khi đó, chúng cùng thuộc một đường thẳng d. Vậy hai vectơ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ có cùng giá là d. Suy ra chúng cùng phương.
- Giả sử hai vectơ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ cùng phương. Khi đó, chúng có cùng giá hoặc có hai giá song song với nhau. Mặt khác, giá của các vectơ trên đều đi qua A nên chúng trùng nhau. Vậy A, B, C thẳng hàng.

Nhận xét. Ba điểm A, B, C thẳng hàng khi và chỉ khi $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ cùng phương.

Luyện tập 3. Trong các điều kiện dưới đây, chọn điều kiện cần và đủ để một điểm M nằm giữa hai điểm phân biệt A và B.

a) $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AM}$ ngược hướng.

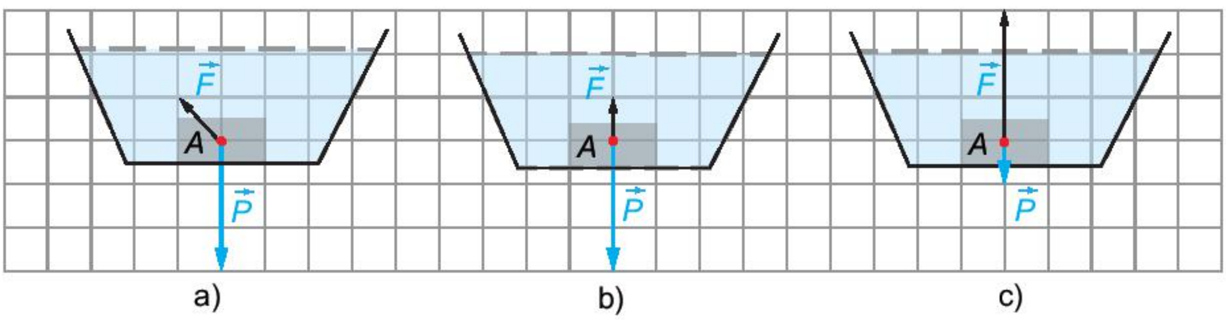
b) $\overrightarrow{MA}$ và $\overrightarrow{MB}$ cùng phương.

c) $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AM}$ cùng hướng.

d) $\overrightarrow{MA}$ và $\overrightarrow{MB}$ ngược hướng.

Chú ý. Ta có thể dùng vectơ để biểu diễn các đại lượng như lực, vận tốc, gia tốc. Hướng của vectơ chỉ hướng của đại lượng, độ dài của vectơ thể hiện cho độ lớn của đại lượng và được lấy tỉ lệ với độ lớn của đại lượng.

Ví dụ 4. Một vật A được thả chìm hoàn toàn dưới đáy một cốc chất lỏng. Biết rằng trong ba cách biểu diễn lực đẩy Archimedes (Ác-si-mét) $\vec{F}$ và trọng lực $\vec{P}$ tác động lên vật A ở Hình 4.11, có một cách biểu diễn đúng.



Hình 4.11

Hãy chỉ ra mối quan hệ giữa trọng lượng riêng của vật A và trọng lượng riêng của chất lỏng trong cốc.

Giải

Lực đẩy Archimedes và trọng lực đều tác động lên vật A theo phương thẳng đứng, hai lực này cùng phương nhưng ngược hướng. Do đó, Hình 4.11a không đúng. Vật A chìm xuống đáy nên trọng lực P (có hướng từ trên xuống) lớn hơn lực đẩy Archimedes F (có hướng từ dưới lên). Do vậy, Hình 4.11c không đúng.

Vậy hình biểu diễn đúng là Hình 4.11b. Theo đó, vectơ biểu diễn lực $\vec{P}$ có độ dài gấp 3 lần độ dài của vectơ biểu diễn lực $\vec{F}$.

Độ lớn của trọng lực và lực đẩy Archimedes tác động lên A là: $\left|\vec{P}\right| = d' \cdot V$, $\left|\vec{F}\right| = d \cdot V$, trong đó V (m^3) là thể tích của vật A và d', d (N/m^3) tương ứng là trọng lượng riêng của vật A và của chất lỏng. Do $\left|\vec{P}\right| = 3\left|\vec{F}\right|$ (theo H.4.11b) nên $d' = 3d$. Vậy trọng lượng riêng của vật A gấp 3 lần trọng lượng riêng của chất lỏng trong cốc.

Vận dụng. Hai ca nô A và B chạy trên sông với các vận tốc riêng có cùng độ lớn là 15 km/h. Tuy vậy, ca nô A chạy xuôi dòng còn ca nô B chạy ngược dòng. Vận tốc của dòng nước trên sông là 3 km/h.

a) Hãy thể hiện trên hình vẽ, vectơ vận tốc $\vec{v}$ của dòng nước và các vectơ vận tốc thực tế $\overrightarrow{v_a}$, $\overrightarrow{v_b}$ của các ca nô A, B.

b) Trong các vectơ $\vec{v}$, $\overrightarrow{v_a}$, $\overrightarrow{v_b}$, những cặp vectơ nào cùng phương và những cặp vectơ nào ngược hướng?

BÀI TẬP

4.1. Cho ba vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ đều khác $\vec{0}$. Những khẳng định nào sau đây là đúng?

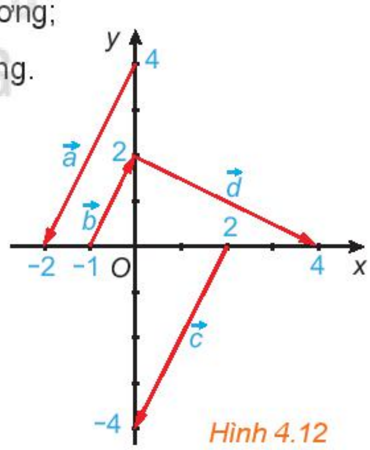
a) $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ đều cùng hướng với $\vec{0}$;

b) Nếu $\vec{b}$ không cùng hướng với $\vec{a}$ thì $\vec{b}$ ngược hướng với $\vec{a}$;

c) Nếu $\vec{a}$ và $\vec{b}$ đều cùng phương với $\vec{c}$ thì $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng phương;

d) Nếu $\vec{a}$ và $\vec{b}$ đều cùng hướng với $\vec{c}$ thì $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng hướng.

4.2. Trong Hình 4.12, hãy chỉ ra các vectơ cùng phương, các cặp vectơ ngược hướng và các cặp vectơ bằng nhau.



Hình 4.12

4.3. Chứng minh rằng tứ giác $ABCD$ là một hình bình hành khi và chỉ khi $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$.

4.4. Cho hình vuông $ABCD$ có hai đường chéo cắt nhau tại O. Hãy chỉ ra tập hợp S gồm tất cả các vectơ khác $\vec{0}$, có điểm đầu và điểm cuối thuộc tập hợp $\{A; B; C; D; O\}$. Hãy chia tập S thành các nhóm sao cho hai vectơ thuộc cùng một nhóm khi và chỉ khi chúng bằng nhau.

4.5. Trên mặt phẳng toạ độ Oxy, hãy vẽ các vectơ $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{MN}$ với $A(1; 2)$, $M(0; -1)$, $N(3; 5)$.

a) Chỉ ra mối quan hệ giữa hai vectơ trên.

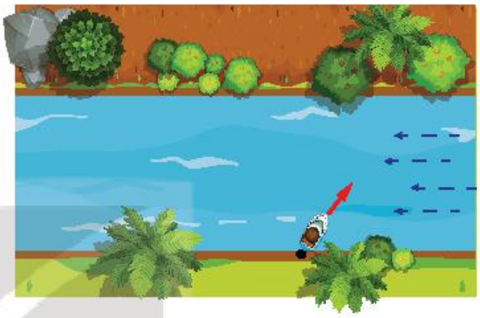
b) Một vật thể khởi hành từ M và chuyển động thẳng đều với vận tốc (tính theo giờ) được biểu diễn bởi vectơ $\vec{v} = \overrightarrow{OA}$. Hỏi vật thể đó có đi qua N hay không? Nếu có thì sau bao lâu vật sẽ tới N?

Bài 8 TỔNG VÀ HIỆU CỦA HAI VECTƠ

THUẬT NGỮ
- Tổng của hai vectơ
- Hiệu của hai vectơ
- Vectơ đối

KIẾN THỨC, KĨ NĂNG
- Thực hiện các phép toán cộng, trừ vectơ.
- Mô tả trung điểm của đoạn thẳng, trọng tâm của tam giác bằng vectơ.
- Vận dụng vectơ trong bài toán tổng hợp lực, tổng hợp vận tốc.

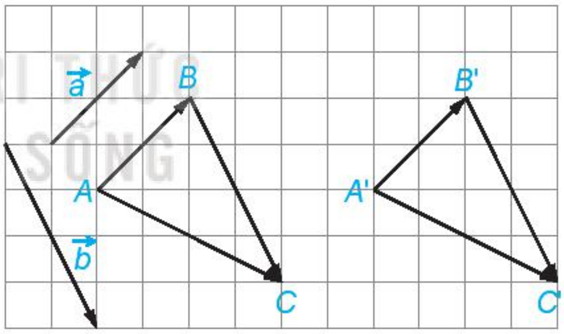
Một con tàu chuyển động từ bờ bên này sang bờ bên kia của một dòng sông với vận tốc riêng không đổi. Giả sử vận tốc dòng nước là không đổi và đáng kể, các yếu tố bên ngoài khác không ảnh hưởng đến vận tốc thực tế của tàu. Nếu không quan tâm đến điểm đến thì cần giữ lái cho tàu tạo với bờ sông một góc bao nhiêu để tàu sang bờ bên kia được nhanh nhất?



Vận tốc thực tế của con tàu trên sông đối với bờ phụ thuộc vào vận tốc riêng của tàu (đối với dòng nước) và vận tốc của dòng nước (đối với bờ). Tương tự, một vật thường chịu tác động của nhiều lực. Ta đã biết dùng vectơ để biểu diễn các đại lượng đó; bài học này xây dựng các phép toán vectơ, tương thích với việc tổng hợp vận tốc, tổng hợp và phân tích lực.

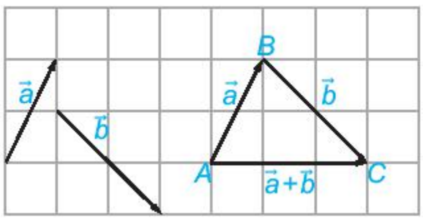
1. TỔNG CỦA HAI VECTƠ

HĐ1. Với hai vectơ $\vec{a}, \vec{b}$ cho trước, lấy một điểm A và vẽ các vectơ $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$. Lấy điểm A' khác A và cũng vẽ các vectơ $\overrightarrow{A'B'} = \vec{a}$, $\overrightarrow{B'C'} = \vec{b}$. Hỏi hai vectơ $\overrightarrow{AC}$ và $\overrightarrow{A'C'}$ có mối quan hệ gì?



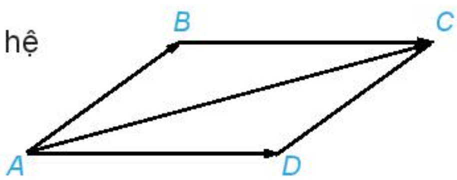
Cho hai vectơ $\vec{a}, \vec{b}$. Lấy một điểm A tuỳ ý và vẽ $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$ (H.4.13). Khi đó vectơ $\overrightarrow{AC}$ được gọi là tổng của hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ và được kí hiệu là $\vec{a} + \vec{b}$.

Phép lấy tổng của hai vectơ được gọi là phép cộng vectơ.



Hình 4.13

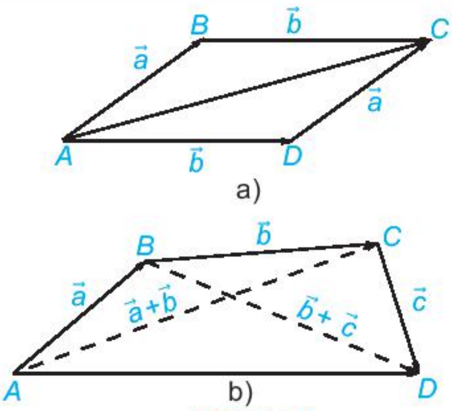
HĐ2. Cho hình bình hành $ABCD$. Tìm mối quan hệ giữa hai vectơ $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$ và $\overrightarrow{AC}$.



Quy tắc ba điểm: Với ba điểm bất kì A, B, C, ta có $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$.
Quy tắc hình bình hành: Nếu $ABCD$ là một hình bình hành thì $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}$.

HĐ3. a) Trong Hình 4.14a, hãy chỉ ra vectơ $\vec{a}+\vec{b}$ và vectơ $\vec{b}+\vec{a}$.

b) Trong Hình 4.14b, hãy chỉ ra vectơ $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}$ và vectơ $\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$.

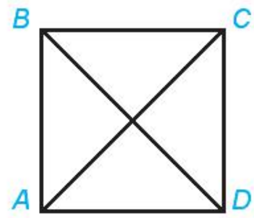


Hình 4.14

Với ba vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ tuỳ ý:
- Tính chất giao hoán: $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$;
- Tính chất kết hợp: $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$;
- Tính chất của vectơ-không: $\vec{a}+\vec{0}=\vec{0}+\vec{a}=\vec{a}$.

Chú ý. Do các vectơ $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}$ và $\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$ bằng nhau, nên ta còn viết chúng dưới dạng $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$ và gọi là *tổng của ba vectơ* $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$. Tương tự, ta cũng có thể viết tổng của một số vectơ mà không cần dùng các dấu ngoặc.

Ví dụ 1. Cho hình vuông $ABCD$ với cạnh có độ dài bằng 1. Tính độ dài của các vectơ $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{BD}$.



Giải

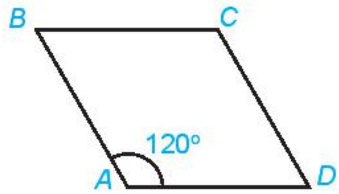
Do $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$ nên $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{DB}$.

Vậy $|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CB}|=|\overrightarrow{DB}|=DB=\sqrt{2}$.

Ta có $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{BD}=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD})+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AC}$.

Do đó $|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{BD}|=AC=\sqrt{2}$.

Luyện tập 1. Cho hình thoi $ABCD$ với cạnh có độ dài bằng 1 và $\widehat{BAD}=120°$. Tính độ dài của các vectơ $\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{BA}$.



2. HIỆU CỦA HAI VECTƠ

Hai đội kéo co bất phân thắng bại!

HĐ4. Thế nào là hai lực cân bằng? Nếu dùng hai vectơ để biểu diễn hai lực cân bằng thì hai vectơ này có mối quan hệ gì với nhau?

- Vectơ có cùng độ dài và ngược hướng với vectơ $\vec{a}$ được gọi là vectơ đối của vectơ $\vec{a}$. Vectơ đối của $\vec{a}$ được kí hiệu là $-\vec{a}$.
- Vectơ $\vec{0}$ được coi là vectơ đối của chính nó.

Chú ý. Hai vectơ đối nhau khi và chỉ khi tổng của chúng bằng $\vec{0}$.

Vectơ $\vec{a}+(-\vec{b})$ được gọi là hiệu của hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ và được kí hiệu là $\vec{a}-\vec{b}$. Phép lấy hiệu hai vectơ được gọi là phép trừ vectơ.

Chú ý. Nếu $\vec{b}+\vec{c}=\vec{a}$ thì $\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b})=\vec{c}+\vec{b}+(-\vec{b})=\vec{c}+\vec{0}=\vec{c}$.
Với ba điểm O, M, N tuỳ ý, ta có $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{ON}=(-\overrightarrow{OM})+\overrightarrow{ON}=\overrightarrow{ON}-\overrightarrow{OM}$.

Quy tắc hiệu: Với ba điểm O, M, N, ta có $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{ON}-\overrightarrow{OM}$.

Ví dụ 2. Cho hình bình hành $ABCD$ và một điểm O bất kì.
Chứng minh rằng $\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OD}$.

Giải

Áp dụng quy tắc hiệu, ta có $\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{DC}$.

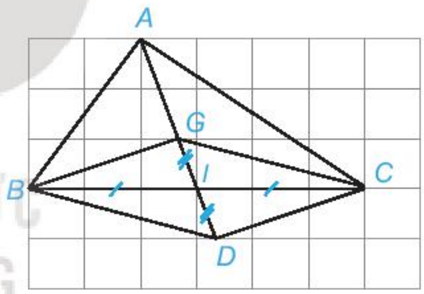
Mặt khác $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$ nên $\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OD}$.

Ví dụ 3. a) Chứng minh rằng nếu I là trung điểm của đoạn thẳng AB thì $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}=\vec{0}$.
b) Chứng minh rằng nếu G là trọng tâm của tam giác ABC thì $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$.

Giải

Hình 4.15

a) (H.4.15) Khi I là trung điểm của AB, thì hai vectơ $\overrightarrow{IA}$ và $\overrightarrow{IB}$ có cùng độ dài và ngược hướng (H.4.15). Do đó, $\overrightarrow{IA}$ và $\overrightarrow{IB}$ đối nhau, suy ra $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}=\vec{0}$.



Hình 4.16

b) (H.4.16) Trọng tâm G của tam giác ABC thuộc trung tuyến AI và $GA = 2GI$. Lấy điểm D đối xứng với G qua I. Khi đó tứ giác $GBDC$ có hai đường chéo cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường nên nó là một hình bình hành. Ta có $GA = 2GI = GD$.

Hai vectơ $\overrightarrow{GA}$ và $\overrightarrow{GD}$ có cùng độ dài và ngược hướng nên chúng là hai vectơ đối nhau, do đó $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GD}=\vec{0}$.

Trong hình bình hành $GBDC$, ta có $\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{GD}$.
Vậy $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GD}=\vec{0}$.

Luyện tập 2. Cho tứ giác $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, CD và O là trung điểm của MN. Chứng minh rằng $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=\vec{0}$.

Chú ý. Phép cộng vectơ tương ứng với các quy tắc tổng hợp lực, tổng hợp vận tốc:

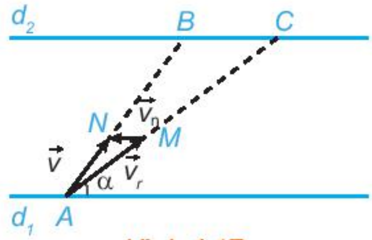
- Nếu hai lực cùng tác động vào chất điểm A và được biểu diễn bởi các vectơ $\vec{u}_1, \vec{u}_2$ thì hợp lực tác động vào A được biểu diễn bởi vectơ $\vec{u}_1+\vec{u}_2$.
- Nếu một con thuyền di chuyển trên sông với vận tốc riêng (vận tốc so với dòng nước) được biểu diễn bởi vectơ $\overrightarrow{v_r}$ và vận tốc của dòng nước (so với bờ) được biểu diễn bởi vectơ $\overrightarrow{v_n}$ thì vận tốc thực tế của thuyền (so với bờ) được biểu diễn bởi vectơ $\vec{v}_r+\vec{v}_n$.

Trong Vật lí, trọng tâm của một vật là điểm đặt của trọng lực tác dụng lên vật đó. Đối với một vật mỏng hình đa giác $A_1A_2...A_n$ thì trọng tâm của nó là điểm G thoả mãn $\overrightarrow{GA_1}+\overrightarrow{GA_2}+\cdots+\overrightarrow{GA_n}=\vec{0}$.

Ví dụ 4. Hãy giải bài toán trong *tình huống mở đầu*.

Giải

Ta biểu thị hai bờ sông là hai đường thẳng song song d_1, d_2 (H.4.17). Giả sử tàu xuất phát từ $A \in d_1$ và bánh lái luôn được giữ để tàu tạo với bờ góc α. Gọi $\vec{v_r}$ và $\vec{v_n}$ lần lượt là vectơ vận tốc riêng của tàu và vận tốc dòng nước. Gọi M, N là các điểm sao cho $\vec{v_r} = \overrightarrow{AM}$, $\vec{v_n} = \overrightarrow{MN}$.



Hình 4.17

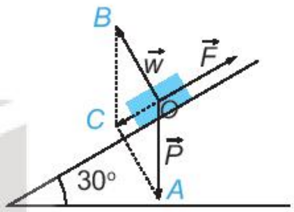
Khi đó tàu chuyển động với vectơ vận tốc thực tế là $\vec{v} = \vec{v_r} + \vec{v_n} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AN}$.

Gọi B, C tương ứng là giao điểm của AN, AM với d_2. Tàu chuyển động thẳng từ A đến B với vectơ vận tốc thực tế $\overrightarrow{AN}$, do đó thời gian cần thiết để tàu sang được bờ d_2 là $\dfrac{AB}{AN} = \dfrac{AC}{AM}$.

Mặt khác, $AM = \left|\vec{v_r}\right|$ không đổi nên $\dfrac{AC}{AM}$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow AC$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow AC \perp d_2 \Leftrightarrow AM \perp d_2$.

Vậy để tàu sang được bờ bên kia nhanh nhất, ta cần giữ bánh lái để tàu luôn vuông góc với bờ.

Vận dụng. Tính lực kéo cần thiết để kéo một khẩu pháo có trọng lượng 22 148 N (ứng với khối lượng xấp xỉ 2 260 kg) lên một con dốc nghiêng 30° so với phương nằm ngang (H.4.18). Nếu lực kéo của mỗi người bằng 100 N, thì cần tối thiểu bao nhiêu người để kéo pháo?



Hình 4.18

Chú ý. Ta coi khẩu pháo chịu tác động của ba lực: trọng lực $\vec{P}$ (có độ lớn $\left|\vec{P}\right| = 22\,148$ N, có phương vuông góc với phương nằm ngang và hướng xuống dưới), phản lực $\vec{w}$ (có độ lớn $\left|\vec{w}\right| = \left|\vec{P}\right|\cos 30°$, có phương vuông góc với mặt dốc và hướng lên trên) và lực kéo $\vec{F}$ (theo phương dốc, hướng từ chân dốc lên đỉnh dốc).

BÀI TẬP

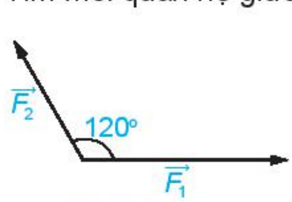
4.6. Cho bốn điểm A, B, C, D. Chứng minh rằng:

a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA} = \vec{0}$; b) $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BD}$.

4.7. Cho hình bình hành $ABCD$. Hãy tìm điểm M để $\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$. Tìm mối quan hệ giữa hai vectơ $\overrightarrow{CD}$ và $\overrightarrow{CM}$.

4.8. Cho tam giác đều ABC có cạnh bằng a. Tính độ dài của các vectơ $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.

4.9. Hình 4.19 biểu diễn hai lực $\vec{F_1}$, $\vec{F_2}$ cùng tác động lên một vật, cho $\left|\vec{F_1}\right| = 3$ N, $\left|\vec{F_2}\right| = 2$ N. Tính độ lớn của hợp lực $\vec{F_1} + \vec{F_2}$.



Hình 4.19

4.10. Hai con tàu xuất phát cùng lúc từ bờ bên này để sang bờ bên kia của dòng sông với vận tốc riêng không đổi và có độ lớn bằng nhau. Hai tàu luôn được giữ lái sao cho chúng tạo với bờ cùng một góc nhọn nhưng một tàu hướng xuống hạ lưu, một tàu hướng lên thượng nguồn (hình bên). Vận tốc dòng nước là đáng kể, các yếu tố bên ngoài khác không ảnh hưởng tới vận tốc của các tàu. Hỏi tàu nào sang bờ bên kia trước?

Bài 9 TÍCH CỦA MỘT VECTƠ VỚI MỘT SỐ

THUẬT NGỮ
- Tích của vectơ với một số
- Phân tích một vectơ theo hai vectơ không cùng phương

KIẾN THỨC, KĨ NĂNG
- Thực hiện phép nhân vectơ với một số.
- Mô tả các mối quan hệ cùng phương, cùng hướng bằng vectơ.

Với mỗi cặp vật đặt trên hai đầu của một cánh tay đòn AB, luôn có duy nhất một điểm M thuộc AB để nếu đặt trụ đỡ tại M thì cánh tay đòn ở trạng thái cân bằng (H.4.20). Điều trên còn đúng trong những trường hợp tổng quát hơn, chẳng hạn, cánh tay đòn được thay bởi một tấm ván hình đa giác n đỉnh $A_1, A_2, \ldots, A_n$, tại mỗi đỉnh A_i có đặt một vật nặng m_i (kg). Ở đây, ta coi cánh tay đòn, tấm ván là không có trọng lượng. Trong Vật lí, điểm M như trên được gọi là điểm khối tâm của hệ chất điểm $A_1, A_2, \ldots, A_n$ ứng với các khối lượng $m_1, m_2, \ldots, m_n$ (kg).

Qua bài học này, ta sẽ thấy Hình học cho phép xác định vị trí khối tâm của một hệ chất điểm.

Hình 4.20

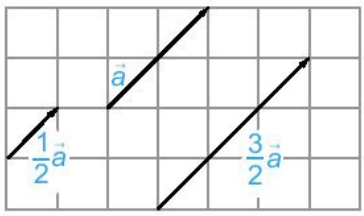
1. TÍCH CỦA MỘT VECTƠ VỚI MỘT SỐ

HĐ1. Cho vectơ $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$. Hãy xác định điểm C sao cho $\overrightarrow{BC} = \vec{a}$.

a) Tìm mối quan hệ giữa $\overrightarrow{AB}$ và $\vec{a} + \vec{a}$.

b) Vectơ $\vec{a} + \vec{a}$ có mối quan hệ như thế nào về hướng và độ dài đối với vectơ $\vec{a}$?

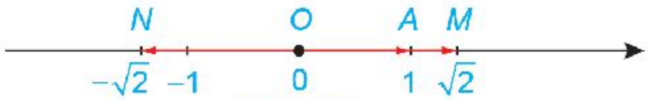
Tích của một vectơ $\vec{a} \neq \vec{0}$ với một số thực $k > 0$ là một vectơ, kí hiệu là $k\vec{a}$, cùng hướng với vectơ $\vec{a}$ và có độ dài bằng $k|\vec{a}|$.



Hình 4.21

? $1\vec{a}$ và $\vec{a}$ có bằng nhau hay không?

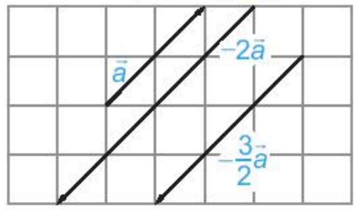
HĐ2. Trên một trục số, gọi O, A, M, N tương ứng biểu thị các số 0; 1; $\sqrt{2}$; $-\sqrt{2}$. Hãy nêu mối quan hệ về hướng và độ dài của mỗi vectơ $\overrightarrow{OM}$, $\overrightarrow{ON}$ với vectơ $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$. Viết đẳng thức thể hiện mối quan hệ giữa hai vectơ $\overrightarrow{OM}$ và $\overrightarrow{OA}$.



Hình 4.22

Mối quan hệ giữa $\overrightarrow{ON}$ và $\overrightarrow{OA}$ được thể hiện bởi đẳng thức nào?

> Tích của một vectơ $\vec{a} \neq \vec{0}$ với một số thực $k < 0$ là một vectơ, kí hiệu là $k\vec{a}$, ngược hướng với vectơ $\vec{a}$ và có độ dài bằng $(-k)|\vec{a}|$.

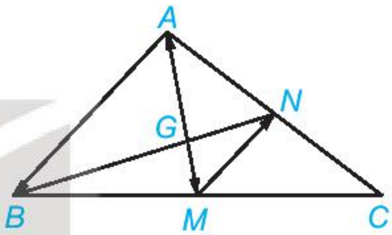


Hình 4.23

Chú ý. Ta quy ước $k\vec{a} = \vec{0}$ nếu $\vec{a} = \vec{0}$ hoặc $k = 0$.

Trong Hình 4.24, hai trung tuyến AM và BN của tam giác ABC cắt nhau tại G.

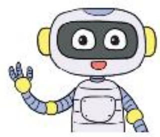
Ta có $\overrightarrow{GA} = -2\overrightarrow{GM}$, $\overrightarrow{MN} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.



Hình 4.24

Nhận xét. Vectơ $k\vec{a}$ có độ dài bằng $|k||\vec{a}|$ và cùng hướng với $\vec{a}$ nếu $k \geq 0$, ngược hướng với $\vec{a}$ nếu $\vec{a} \neq \vec{0}$ và $k < 0$.

Phép lấy tích của vectơ với một số gọi là *phép nhân vectơ với một số* (hay *phép nhân một số với vectơ*).



? $-\vec{a}$ và $(-1)\vec{a}$ có mối quan hệ gì?

Ví dụ 1. Chứng minh rằng hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ $(\vec{b} \neq \vec{0})$ cùng phương khi và chỉ khi tồn tại số k để $\vec{a} = k\vec{b}$.

Giải

Thật vậy, nếu $\vec{a} = k\vec{b}$ thì $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng phương. Ngược lại, giả sử $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng phương.

Ta lấy $k = \frac{|\vec{a}|}{|\vec{b}|}$ nếu $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng hướng và lấy $k = -\frac{|\vec{a}|}{|\vec{b}|}$ nếu $\vec{a}$ và $\vec{b}$ ngược hướng.

Khi đó $\vec{a} = k\vec{b}$.

Luyện tập 1. Cho đường thẳng d đi qua hai điểm phân biệt A và B (H.4.25). Những khẳng định nào sau đây là đúng?

Hình 4.25

a) Điểm M thuộc đường thẳng d khi và chỉ khi tồn tại số t để $\overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{AB}$.

b) Với điểm M bất kì, ta luôn có $\overrightarrow{AM} = \frac{AM}{AB}\overrightarrow{AB}$.

c) Điểm M thuộc tia đối của tia AB khi và chỉ khi tồn tại số $t \leq 0$ để $\overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{AB}$.

2. CÁC TÍNH CHẤT CỦA PHÉP NHÂN VECTƠ VỚI MỘT SỐ

HĐ3. Với $\vec{u} \neq \vec{0}$ và hai số thực k, t, những khẳng định nào sau đây là đúng?

a) Hai vectơ $k(t\vec{u})$ và $(kt)\vec{u}$ có cùng độ dài bằng $|kt||\vec{u}|$.

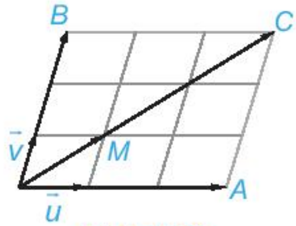
b) Nếu $kt \geq 0$ thì cả hai vectơ $k(t\vec{u})$, $(kt)\vec{u}$ cùng hướng với $\vec{u}$.

c) Nếu $kt < 0$ thì cả hai vectơ $k(t\vec{u})$, $(kt)\vec{u}$ ngược hướng với $\vec{u}$.

d) Hai vectơ $k(t\vec{u})$ và $(kt)\vec{u}$ bằng nhau.

HĐ4. Hãy chỉ ra trên Hình 4.26 hai vectơ $3(\vec{u}+\vec{v})$ và $3\vec{u}+3\vec{v}$.

Từ đó, nêu mối quan hệ giữa $3(\vec{u}+\vec{v})$ và $3\vec{u}+3\vec{v}$.



Hình 4.26

> Với hai vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$ và hai số thực k, t, ta luôn có:
> - $k(t\vec{a}) = (kt)\vec{a}$;
> - $(k+t)\vec{a} = k\vec{a} + t\vec{a}$;
> - $k(\vec{a}+\vec{b}) = k\vec{a} + k\vec{b}$; $k(\vec{a}-\vec{b}) = k\vec{a} - k\vec{b}$;
> - $1\,\vec{a} = \vec{a}$; $(-1)\vec{a} = -\vec{a}$.

Ví dụ 2. Cho đoạn thẳng AB có trung điểm I. Chứng minh rằng với điểm O tuỳ ý, ta có

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = 2\overrightarrow{OI}.$$

Giải

Vì I là trung điểm của AB nên $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$ (Ví dụ 3a, Bài 8).

Do đó $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \left(\overrightarrow{OI} + \overrightarrow{IA}\right) + \left(\overrightarrow{OI} + \overrightarrow{IB}\right) = 2\overrightarrow{OI} + \left(\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB}\right) = 2\overrightarrow{OI}$.

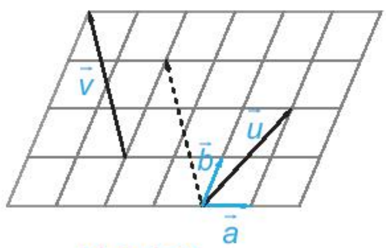
Luyện tập 2. Cho tam giác ABC có trọng tâm G. Chứng minh rằng với điểm O tuỳ ý, ta có

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 3\overrightarrow{OG}.$$

Nhận xét

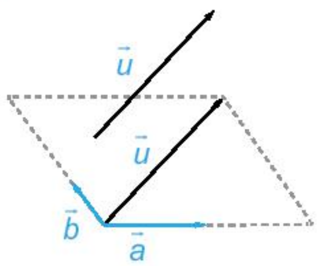
- Điểm I là trung điểm của đoạn thẳng AB khi và chỉ khi $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$.
- Điểm G là trọng tâm của tam giác ABC khi và chỉ khi $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$.

Luyện tập 3. Trong Hình 4.27, hãy biểu thị mỗi vectơ $\vec{u}$, $\vec{v}$ theo hai vectơ $\vec{a}, \vec{b}$, tức là tìm các số x, y, z, t để $\vec{u} = x\vec{a} + y\vec{b}$, $\vec{v} = t\vec{a} + z\vec{b}$.



Hình 4.27

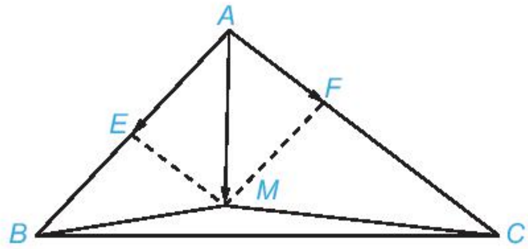
Chú ý. Cho hai vectơ không cùng phương $\vec{a}, \vec{b}$ (H.4.28). Khi đó, mọi vectơ $\vec{u}$ đều biểu thị (phân tích) được một cách duy nhất theo hai vectơ $\vec{a}, \vec{b}$, nghĩa là có duy nhất cặp số $(x; y)$ sao cho $\vec{u} = x\vec{a} + y\vec{b}$.



Hình 4.28

Ví dụ 3. Cho tam giác ABC. Hãy xác định điểm M để $\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}=\vec{0}$.

Giải (H.4.29)



Hình 4.29

Để xác định vị trí của M, trước hết ta biểu thị $\overrightarrow{AM}$ (với gốc A đã biết) theo hai vectơ đã biết $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$.

Đẳng thức vectơ đã cho tương đương với: $\overrightarrow{MA}+3\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AB}\right)+2\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AC}\right)=\vec{0}$

$\Leftrightarrow 6\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}=\vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$.

Lấy điểm E là trung điểm của AB và điểm F thuộc cạnh AC sao cho $AF=\frac{1}{3}AC$.

Khi đó $\overrightarrow{AE}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AF}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$. Vì vậy $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AF}$.

Suy ra M là đỉnh thứ tư của hình bình hành $EAFM$.

Ta trở lại vấn đề đã được nêu trong phần đầu bài học. Điểm khối tâm M của hệ các chất điểm $A_1, A_2, ..., A_n$ với các khối lượng tương ứng $m_1, m_2, ..., m_n$ được xác định bởi đẳng thức vectơ

$$m_1\overrightarrow{MA_1}+m_2\overrightarrow{MA_2}+\cdots+m_n\overrightarrow{MA_n}=\vec{0}.$$

Vì vậy, việc xác định điểm khối tâm được quy về việc xác định điểm thoả mãn đẳng thức vectơ tương ứng.

BÀI TẬP

4.11. Cho hình bình hành $ABCD$. Gọi M là trung điểm của cạnh BC. Hãy biểu thị $\overrightarrow{AM}$ theo hai vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AD}$.

4.12. Cho tứ giác $ABCD$. Gọi M, N tương ứng là trung điểm của các cạnh AB, CD. Chứng minh rằng $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}$.

4.13. Cho hai điểm phân biệt A và B.

a) Hãy xác định điểm K sao cho $\overrightarrow{KA}+2\overrightarrow{KB}=\vec{0}$.

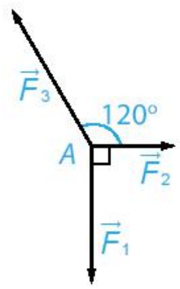
b) Chứng minh rằng với mọi điểm O, ta có $\overrightarrow{OK}=\frac{1}{3}\overrightarrow{OA}+\frac{2}{3}\overrightarrow{OB}$.

4.14. Cho tam giác ABC.

a) Hãy xác định điểm M để $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}=\vec{0}$.

b) Chứng minh rằng với mọi điểm O, ta có $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+2\overrightarrow{OC}=4\overrightarrow{OM}$.

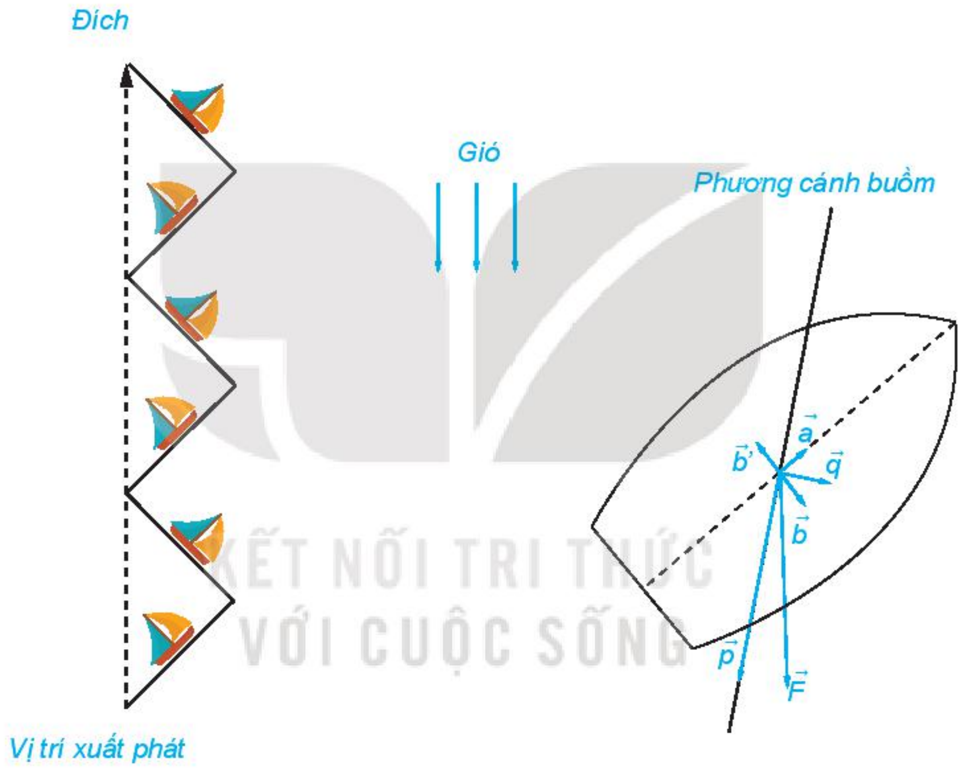
4.15. Chất điểm *A* chịu tác động của ba lực $\vec{F_1}, \vec{F_2}, \vec{F_3}$ như Hình 4.30 và ở trạng thái cân bằng (tức là $\vec{F_1} + \vec{F_2} + \vec{F_3} = \vec{0}$). Tính độ lớn của các lực $\vec{F_2}, \vec{F_3}$, biết $\vec{F_1}$ có độ lớn là 20 N.



Hình 4.30

Em có biết?

Mặc dù dựa vào lực đẩy của gió, bằng cách đi theo đường dích dắc, thuyền buồm vẫn có thể di chuyển tới một vị trí ở ngược hướng gió so với vị trí xuất phát.

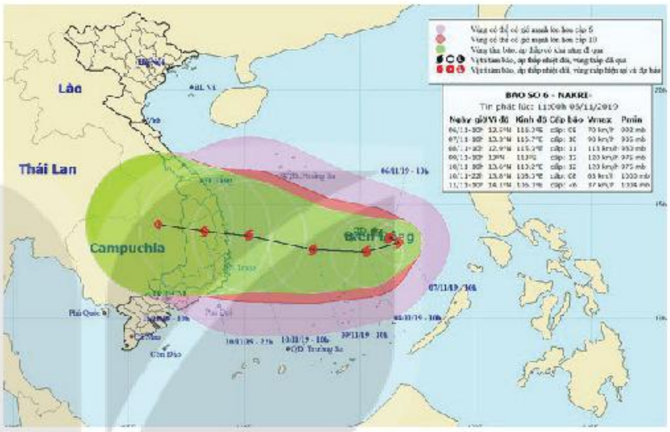


Ta hãy dùng kiến thức về vectơ để phân tích các lực chính tác động tới sự chuyển động của thuyền buồm trong trường hợp này. Lực $\vec{F}$ do gió tác động vào cánh buồm được phân tích thành lực $\vec{p}$ cùng phương với cánh buồm và lực $\vec{q}$ vuông góc với cánh buồm. Do cánh buồm mỏng nên lực $\vec{p}$ chỉ trượt đi mà không tác động lên cánh buồm. Ta lại phân tích lực $\vec{q}$ thành lực $\vec{a}$ cùng phương với sống thuyền và lực $\vec{b}$ có phương vuông góc với sống thuyền. Thuyền buồm có sống thuyền sâu (mũi nhọn) nên nó chịu một lực cản $\vec{b'}$ đáng kể của nước, vuông góc với sống thuyền. Người ta điều chỉnh hướng thuyền (hướng sống thuyền), phương của cánh buồm để lực cản $\vec{b'}$ của nước (lực này không phụ thuộc vào sự điều chỉnh) thắng lực $\vec{b}$ (có thể điều chỉnh độ lớn). Cuối cùng, dưới tác động của lực $\vec{a}$ thuyền di chuyển và sau một khoảng thời gian, nó lại được điều chỉnh hướng, để đi đến đích theo đường dích dắc.

Bài 10 VECTƠ TRONG MẶT PHẲNG TOẠ ĐỘ

THUẬT NGỮ	KIẾN THỨC, KĨ NĂNG
• Mặt phẳng toạ độ • Toạ độ của vectơ	• Nhận biết toạ độ của vectơ và thể hiện các phép toán vectơ theo toạ độ. • Thể hiện mối quan hệ giữa các vectơ thông qua toạ độ của chúng. • Ứng dụng của toạ độ vectơ trong bài toán xác định vị trí của vật trên mặt phẳng toạ độ.

Một bản tin dự báo thời tiết thể hiện đường đi trong 12 giờ của một cơn bão trên một mặt phẳng toạ độ. Trong khoảng thời gian đó, tâm bão di chuyển thẳng đều từ vị trí có toạ độ (13,8; 108,3) đến vị trí có toạ độ (14,1; 106,3). Dựa vào thông tin trên, liệu ta có thể dự đoán được vị trí của tâm bão tại thời điểm bất kì trong khoảng thời gian 12 giờ đó hay không?



Hình 4.31. Ta có thể dùng một phần mặt phẳng toạ độ để mô tả một phạm vi nhất định trên Trái Đất mà vị trí x^o vĩ bắc, y^o kinh đông của tâm áp thấp được thể hiện bởi điểm có toạ độ (x; y).

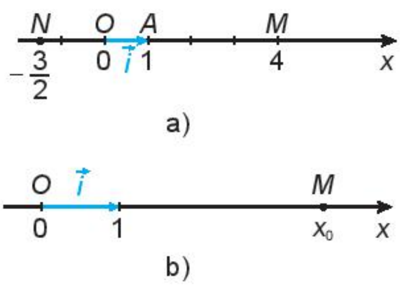
Trong bài học này, ta gắn cho mỗi vectơ trên mặt phẳng toạ độ một cặp số để có thể làm việc với vectơ thông qua cặp số đó.

1. TOẠ ĐỘ CỦA VECTƠ

HĐ1. Trên trục số Ox, gọi A là điểm biểu diễn số 1 và đặt $\overrightarrow{OA} = \vec{i}$ (H.4.32a). Gọi M là điểm biểu diễn số 4, N là điểm biểu diễn số $-\dfrac{3}{2}$. Hãy biểu thị mỗi vectơ $\overrightarrow{OM}$, $\overrightarrow{ON}$ theo vectơ $\vec{i}$.

Dùng vectơ, ta có thể diễn đạt lại trục số như sau:

Trục toạ độ (còn gọi là *trục*, hay *trục số*) là một đường thẳng mà trên đó đã xác định một điểm O và một vectơ $\vec{i}$ có độ dài bằng 1. Điểm O gọi là *gốc toạ độ*, vectơ $\vec{i}$ gọi là *vectơ đơn vị* của trục. Điểm M trên trục biểu diễn số x_0 nếu $\overrightarrow{OM} = x_0\vec{i}$ (H.4.32b).

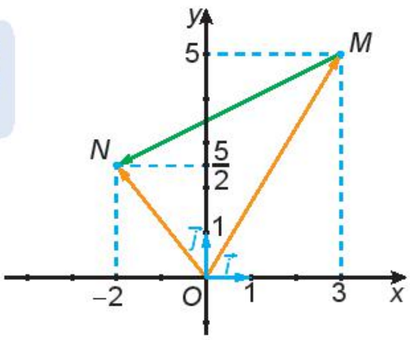


Hình 4.32

HĐ2. Trong Hình 4.33:

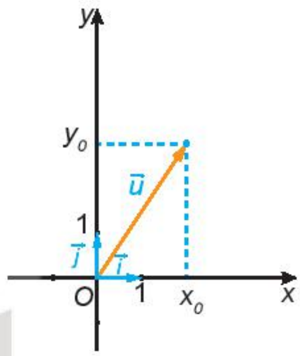
a) Hãy biểu thị mỗi vectơ $\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{ON}$ theo các vectơ $\vec{i}, \vec{j}$.

b) Hãy biểu thị vectơ $\overrightarrow{MN}$ theo các vectơ $\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{ON}$, từ đó biểu thị vectơ $\overrightarrow{MN}$ theo các vectơ $\vec{i}, \vec{j}$.



Hình 4.33

Trên mặt phẳng, xét hai trục Ox, Oy có chung gốc O và vuông góc với nhau. Vectơ đơn vị của trục Ox là $\vec{i}$, vectơ đơn vị của trục Oy là $\vec{j}$. Hệ gồm hai trục Ox, Oy như vậy được gọi là *hệ trục toạ độ Oxy*. Điểm O gọi là *gốc toạ độ*, trục Ox gọi là *trục hoành*, trục Oy gọi là *trục tung*. Mặt phẳng chứa hệ trục toạ độ Oxy gọi là mặt phẳng toạ độ Oxy hay mặt phẳng Oxy (H.4.34).



Hình 4.34

Với mỗi vectơ $\vec{u}$ trên mặt phẳng Oxy, có duy nhất cặp số $(x_0; y_0)$ sao cho $\vec{u} = x_0\vec{i} + y_0\vec{j}$. Ta nói vectơ $\vec{u}$ có toạ độ $(x_0; y_0)$ và viết $\vec{u} = (x_0; y_0)$ hay $\vec{u}(x_0; y_0)$. Các số x_0, y_0 tương ứng được gọi là hoành độ, tung độ của $\vec{u}$.

Nhận xét. Hai vectơ bằng nhau khi và chỉ khi chúng có cùng toạ độ.

$$\vec{u}(x; y) = \vec{v}(x'; y') \Leftrightarrow \begin{cases} x = x' \\ y = y'. \end{cases}$$

Ví dụ 1. Tìm toạ độ của các vectơ đơn vị $\vec{i}, \vec{j}$ tương ứng của các trục Ox, Oy.

Giải

Vì $\vec{i} = 1\vec{i} + 0\vec{j}$ nên $\vec{i}$ có toạ độ là (1; 0).

Vì $\vec{j} = 0\vec{i} + 1\vec{j}$ nên $\vec{j}$ có toạ độ là (0; 1).

Luyện tập 1. Tìm toạ độ của $\vec{0}$.

2. BIỂU THỨC TOẠ ĐỘ CỦA CÁC PHÉP TOÁN VECTƠ

HĐ3. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho $\vec{u} = (2; -3)$, $\vec{v} = (4; 1)$, $\vec{a} = (8; -12)$.

a) Hãy biểu thị mỗi vectơ $\vec{u}, \vec{v}, \vec{a}$ theo các vectơ $\vec{i}, \vec{j}$.

b) Tìm toạ độ của các vectơ $\vec{u} + \vec{v}$, $4\vec{u}$.

c) Tìm mối liên hệ giữa hai vectơ $\vec{u}, \vec{a}$.

Cho hai vectơ $\vec{u} = (x; y)$ và $\vec{v} = (x'; y')$. Khi đó:

- $\vec{u} + \vec{v} = (x + x'; y + y')$;
- $\vec{u} - \vec{v} = (x - x'; y - y')$;
- $k\vec{u} = (kx; ky)$, với $k \in \mathbb{R}$.

Ví dụ 2. Cho $\vec{a}=(1;2), \vec{b}=\left(\frac{3}{2};3\right)$.

a) Tìm toạ độ của $\vec{a}+\vec{b}, \vec{a}-2\vec{b}$.

b) Hỏi $\vec{a}$ và $\vec{b}$ có cùng phương hay không?

Giải

a) Vì $\vec{a}=(1;2), \vec{b}=\left(\frac{3}{2};3\right)$ nên $\vec{a}+\vec{b}=\left(\frac{5}{2};5\right)$.

Ta có $2\vec{b}=(3;6)$ nên $\vec{a}-2\vec{b}=(-2;-4)$.

b) Do $\frac{3}{2}\vec{a}=\left(\frac{3}{2};3\right)=\vec{b}$ nên hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng phương.

Nhận xét. Vectơ $\vec{v}(x'; y')$ cùng phương với vectơ $\vec{u}(x; y)\neq\vec{0}$ khi và chỉ khi tồn tại số k sao cho $x'=kx, y'=ky$ (hay là $\frac{x'}{x}=\frac{y'}{y}$ nếu $xy\neq 0$).

HĐ4. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho điểm $M(x_0; y_0)$.

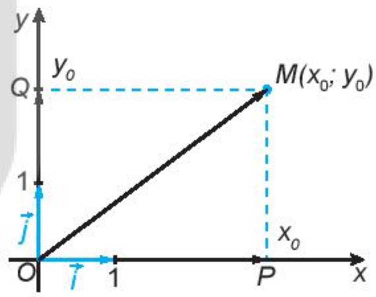
Gọi P, Q tương ứng là hình chiếu vuông góc của M trên trục hoành Ox và trục tung Oy (H.4.35).

a) Trên trục Ox, điểm P biểu diễn số nào? Biểu thị $\overrightarrow{OP}$ theo $\vec{i}$ và tính độ dài của $\overrightarrow{OP}$ theo x_0.

b) Trên trục Oy, điểm Q biểu diễn số nào? Biểu thị $\overrightarrow{OQ}$ theo $\vec{j}$ và tính độ dài của $\overrightarrow{OQ}$ theo y_0.

c) Dựa vào hình chữ nhật $OPMQ$, tính độ dài của $\overrightarrow{OM}$ theo x_0, y_0.

d) Biểu thị $\overrightarrow{OM}$ theo các vectơ $\vec{i}, \vec{j}$.



Hình 4.35

Nếu điểm M có toạ độ $(x; y)$ thì vectơ $\overrightarrow{OM}$ có toạ độ $(x; y)$ và độ dài $\left|\overrightarrow{OM}\right|=\sqrt{x^2+y^2}$.

Nhận xét. Với vectơ $\vec{u}=(x;y)$, ta lấy điểm $M(x;y)$ thì $\vec{u}=\overrightarrow{OM}$. Do đó, $|\vec{u}|=\left|\overrightarrow{OM}\right|=\sqrt{x^2+y^2}$.

Chẳng hạn, vectơ $\vec{u}=(2;-1)$ có độ dài là $|\vec{u}|=\sqrt{2^2+(-1)^2}=\sqrt{5}$.

HĐ5. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho các điểm $M(x; y)$ và $N(x'; y')$.

a) Tìm toạ độ của các vectơ $\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{ON}$.

b) Biểu thị vectơ $\overrightarrow{MN}$ theo các vectơ $\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{ON}$ và tìm toạ độ của $\overrightarrow{MN}$.

c) Tìm độ dài của vectơ $\overrightarrow{MN}$.

Với hai điểm $M(x; y)$ và $N(x'; y')$ thì $\overrightarrow{MN} = (x' - x; y' - y)$ và khoảng cách giữa hai điểm M, N là $MN = \left|\overrightarrow{MN}\right| = \sqrt{(x' - x)^2 + (y' - y)^2}$.

Ví dụ 3. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho ba điểm $A(1; -2)$, $B(3; 2)$, $C(7; 4)$.

a) Tìm toạ độ của các vectơ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$. So sánh các khoảng cách từ B tới A và C.

b) Ba điểm A, B, C có thẳng hàng hay không?

c) Tìm điểm $D(x; y)$ để $ABCD$ là một hình thoi.

Giải

a) Ta có $\overrightarrow{AB} = (3 - 1; 2 - (-2)) = (2; 4)$, $\overrightarrow{BC} = (7 - 3; 4 - 2) = (4; 2)$.

Các khoảng cách từ B tới A và C lần lượt là:

$$AB = \left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{2^2 + 4^2} = 2\sqrt{5};\ BC = \left|\overrightarrow{BC}\right| = \sqrt{4^2 + 2^2} = 2\sqrt{5}.$$

Do đó các khoảng cách này bằng nhau.

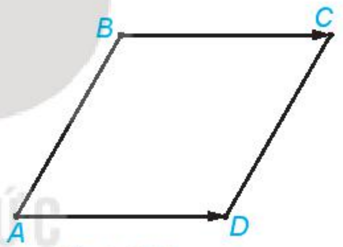
b) Hai vectơ $\overrightarrow{AB} = (2; 4)$, $\overrightarrow{BC} = (4; 2)$ không cùng phương (vì $\frac{2}{4} \neq \frac{4}{2}$). Do đó các điểm A, B, C không cùng nằm trên một đường thẳng. Vậy chúng không thẳng hàng.

c) Các điểm A, B, C không thẳng hàng và $BA = BC$ nên $ABCD$ là một hình thoi khi và chỉ khi $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$.

Do $\overrightarrow{AD} = (x - 1; y + 2)$, $\overrightarrow{BC} = (4; 2)$ nên

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 1 = 4 \\ y + 2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ y = 0. \end{cases}$$

Vậy điểm cần tìm là $D(5; 0)$.



Hình 4.36

Luyện tập 2. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho hai điểm $A(2; 1)$, $B(3; 3)$.

a) Các điểm O, A, B có thẳng hàng hay không?

b) Tìm điểm $M(x; y)$ để $OABM$ là một hình bình hành.

Ví dụ 4. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho ba điểm không thẳng hàng:

$$A(1; 3),\ B(-2; 6),\ C(5; 1).$$

a) Tìm toạ độ trung điểm I của đoạn thẳng AB.

b) Tìm toạ độ trọng tâm G của tam giác ABC.

Giải

a) (H.4.37) Điểm $I(x;\, y)$ là trung điểm của đoạn thẳng AB khi và chỉ khi $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}=\vec{0}$ (*).

Hình 4.37

Mặt khác $\overrightarrow{IA}=(1-x;3-y)$, $\overrightarrow{IB}=(-2-x;6-y)$, $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}=(-1-2x;9-2y)$.

Do đó, (*) tương đương với $\begin{cases}-1-2x=0\\9-2y=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-\dfrac{1}{2}\\y=\dfrac{9}{2}.\end{cases}$

Vậy $I\left(-\dfrac{1}{2};\dfrac{9}{2}\right)$.

b) Điểm $G(x;\, y)$ là trọng tâm của tam giác ABC khi và chỉ khi $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$ (**)

Mặt khác

$\overrightarrow{GA}=(1-x;3-y)$, $\overrightarrow{GB}=(-2-x;6-y)$, $\overrightarrow{GC}=(5-x;1-y)$,

$\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=(4-3x;10-3y)$.

Do đó, (**) tương đương với $\begin{cases}4-3x=0\\10-3y=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{4}{3}\\y=\dfrac{10}{3}.\end{cases}$

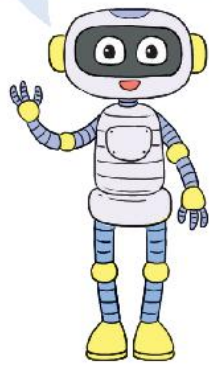
Vậy $G\left(\dfrac{4}{3};\dfrac{10}{3}\right)$.

Chú ý

- Trung điểm M của đoạn thẳng AB có toạ độ là $\left(\dfrac{x_A+x_B}{2};\dfrac{y_A+y_B}{2}\right)$.
- Trọng tâm G của tam giác ABC có toạ độ là $\left(\dfrac{x_A+x_B+x_C}{3};\dfrac{y_A+y_B+y_C}{3}\right)$.

Vận dụng. Từ thông tin dự báo bão được đưa ra ở đầu bài học, hãy xác định toạ độ vị trí M của tâm bão tại thời điểm 9 giờ trong khoảng thời gian 12 giờ của dự báo.

Trong 12 giờ, tâm bão được dự báo di chuyển thẳng đều từ $A(13{,}8;\, 108{,}3)$ tới vị trí có toạ độ $B(14{,}1;\, 106{,}3)$. Gọi toạ độ của M là $(x;\, y)$. Bạn hãy tìm mối liên hệ giữa hai vectơ $\overrightarrow{AM}$ và $\overrightarrow{AB}$ rồi thể hiện mối quan hệ đó theo toạ độ để tìm x; y.



Chú ý. Để thể hiện một phần Trái Đất trên một bản đồ phẳng người ta dùng một phép chiếu bản đồ, với độ sai khác nhất định giữa bản vẽ và thực địa (thường được quy định với từng loại bản đồ). Về nguyên tắc, phạm vi thể hiện càng hẹp thì càng chính xác. Trong vận dụng này, ta chỉ tính toán trong phạm vi một đoạn đường đi ngắn của tâm bão.

BÀI TẬP

4.16. Trong mặt phẳng toạ độ *Oxy*, cho các điểm $M(1; 3)$, $N(4; 2)$.

a) Tính độ dài của các đoạn thẳng *OM, ON, MN*.

b) Chứng minh rằng tam giác *OMN* vuông cân.

4.17. Trong mặt phẳng toạ độ *Oxy*, cho các vectơ $\vec{a} = 3\vec{i} - 2\vec{j}$, $\vec{b} = (4; -1)$ và các điểm $M(-3; 6)$, $N(3; -3)$.

a) Tìm mối liên hệ giữa các vectơ $\overrightarrow{MN}$ và $2\vec{a} - \vec{b}$.

b) Các điểm *O*, *M*, *N* có thẳng hàng hay không?

c) Tìm điểm $P(x; y)$ để *OMNP* là một hình bình hành.

4.18. Trong mặt phẳng toạ độ *Oxy*, cho các điểm $A(1; 3)$, $B(2; 4)$, $C(-3; 2)$.

a) Hãy giải thích vì sao các điểm *A*, *B*, *C* không thẳng hàng.

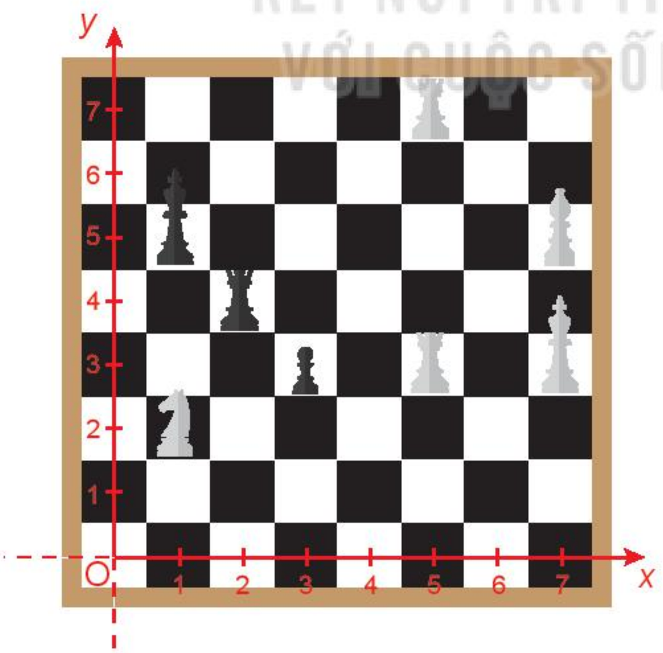
b) Tìm toạ độ trung điểm *M* của đoạn thẳng *AB*.

c) Tìm toạ độ trọng tâm *G* của tam giác *ABC*.

d) Tìm điểm $D(x; y)$ để $O(0; 0)$ là trọng tâm của tam giác *ABD*.

4.19. Sự chuyển động của một tàu thuỷ được thể hiện trên một mặt phẳng toạ độ như sau: Tàu khởi hành từ vị trí $A(1; 2)$ chuyển động thẳng đều với vận tốc (tính theo giờ) được biểu thị bởi vectơ $\vec{v} = (3; 4)$. Xác định vị trí của tàu (trên mặt phẳng toạ độ) tại thời điểm sau khi khởi hành 1,5 giờ.

4.20. Trong Hình 4.38, quân mã đang ở vị trí có toạ độ $(1; 2)$. Hỏi sau một nước đi, quân mã có thể đến những vị trí nào?



Hình 4.38

Bài 11

TÍCH VÔ HƯỚNG CỦA HAI VECTƠ

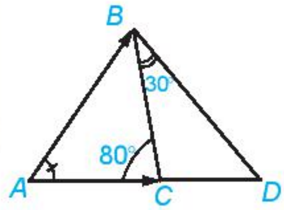
THUẬT NGỮ
- Góc giữa hai vectơ
- Tích vô hướng của hai vectơ

KIẾN THỨC, KĨ NĂNG
- Tính góc, tích vô hướng của hai vectơ trong những trường hợp cụ thể.
- Công thức toạ độ của tích vô hướng, tính chất của tích vô hướng.
- Liên hệ khái niệm tích vô hướng với khái niệm công trong Vật lí.

Toán học cung cấp ngôn ngữ và công cụ cho nhiều ngành khoa học. Trong các bài học trước, ta đã dùng vectơ để biểu diễn các đại lượng lực, vận tốc và dùng phép toán vectơ để tính hợp lực và tổng hợp vận tốc. Bài học này tiếp tục xây dựng khái niệm tích vô hướng giữa hai vectơ - đối tượng toán học còn được dùng để định nghĩa khái niệm công sinh bởi một lực trong Vật lí.

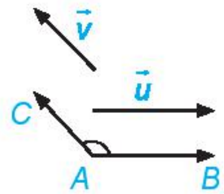
1. GÓC GIỮA HAI VECTƠ

HĐ1. Trong Hình 4.39, số đo góc BAC cũng được gọi là số đo góc giữa hai vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$. Hãy tìm số đo các góc giữa $\overrightarrow{BC}$ và $\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{DA}$ và $\overrightarrow{DB}$.



Hình 4.39

Cho hai vectơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$ khác $\vec{0}$. Từ một điểm A tuỳ ý, vẽ các vectơ $\overrightarrow{AB}=\vec{u}$ và $\overrightarrow{AC}=\vec{v}$ (H.4.40). Khi đó, số đo của góc BAC được gọi là số đo góc giữa hai vectơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$ hay đơn giản là góc giữa hai vectơ $\vec{u}$, $\vec{v}$, kí hiệu là $(\vec{u}, \vec{v})$.



Hình 4.40

Chú ý

- Quy ước rằng góc giữa hai vectơ $\vec{u}$ và $\vec{0}$ có thể nhận một giá trị tuỳ ý từ 0° đến 180°.
- Nếu $(\vec{u}, \vec{v}) = 90^\circ$ thì ta nói rằng $\vec{u}$ và $\vec{v}$ vuông góc với nhau, kí hiệu là $\vec{u} \perp \vec{v}$ hoặc $\vec{v} \perp \vec{u}$. Đặc biệt $\vec{0}$ được coi là vuông góc với mọi vectơ.

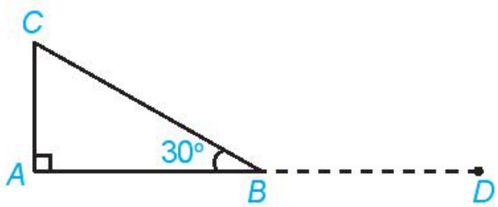
? Khi nào thì góc giữa hai vectơ bằng 0°, bằng 180°?

Ví dụ 1. Cho tam giác ABC vuông tại A và $\widehat{B} = 30^\circ$.

Tính $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$, $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB})$, $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC})$.

Giải (H.4.41)

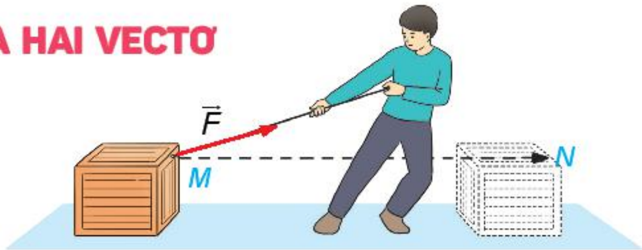
Ta có: $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \widehat{BAC} = 90^\circ$, $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) = \widehat{ACB} = 60^\circ$,
$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) = (\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{BC}) = \widehat{DBC} = 150^\circ$.



Hình 4.41

Luyện tập 1. Cho tam giác đều ABC. Tính $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC})$.

2. TÍCH VÔ HƯỚNG CỦA HAI VECTƠ



Hình 4.42

Trong Vật lí, nếu lực $\vec{F}$ không đổi tác động vào một vật và điểm đặt của lực chuyển động thẳng từ M tới N, thì công A của lực $\vec{F}$ được tính theo công thức:

$$A = |\vec{F}| \cdot |\overrightarrow{MN}| \cdot \cos(\vec{F}, \overrightarrow{MN}),$$

trong đó $|\vec{F}|$ là độ lớn của lực $\vec{F}$ (theo đơn vị Newton);

$|\overrightarrow{MN}|$ là độ dài của vectơ MN (theo đơn vị mét);

$(\vec{F}, \overrightarrow{MN})$ là góc giữa hai vectơ $\vec{F}$ và $\overrightarrow{MN}$.

Toán học gọi giá trị A (không kể đơn vị đo) trong biểu thức nói trên là tích vô hướng của hai vectơ $\vec{F}$ và $\overrightarrow{MN}$.

> Tích vô hướng của hai vectơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$ là một số, kí hiệu là $\vec{u} \cdot \vec{v}$, được xác định bởi công thức sau:
>
> $$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos(\vec{u}, \vec{v}).$$

❓ Khi nào thì tích vô hướng của hai vectơ $\vec{u}, \vec{v}$ là một số dương? Là một số âm?

Chú ý

- $\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.
- $\vec{u} \cdot \vec{u}$ còn được viết là $\vec{u}^2$ và được gọi là bình phương vô hướng của vectơ $\vec{u}$. Ta có $\vec{u}^2 = |\vec{u}| \cdot |\vec{u}| \cdot \cos 0° = |\vec{u}|^2$.

❓ Khi nào thì $(\vec{u} \cdot \vec{v})^2 = \vec{u}^2 \cdot \vec{v}^2$?

Ví dụ 2. Cho hình vuông $ABCD$ có cạnh bằng a.

Tính các tích vô hướng sau: $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BD}$.

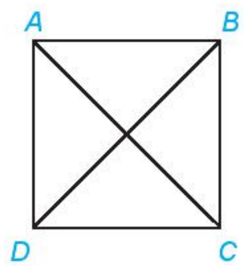
Giải. Vì $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) = 90°$ nên $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = 0$.

Hình vuông có cạnh bằng a nên có đường chéo bằng $a\sqrt{2}$.

Mặt khác, $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = 45°$, $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BD}) = 135°$, do đó

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \cdot AC \cdot \cos 45° = a \cdot a\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = a^2;$$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BD} = AB \cdot BD \cdot \cos 135° = a \cdot a\sqrt{2} \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -a^2.$$



Hình 4.43

Luyện tập 2. Cho tam giác ABC có $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$.

Hãy tính $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ theo a, b, c.

3. BIỂU THỨC TOẠ ĐỘ VÀ TÍNH CHẤT CỦA TÍCH VÔ HƯỚNG

HĐ2. Cho hai vectơ cùng phương $\vec{u} = (x; y)$ và $\vec{v} = (kx; ky)$. Hãy kiểm tra công thức $\vec{u} \cdot \vec{v} = k(x^2 + y^2)$ theo từng trường hợp sau:

a) $\vec{u} = \vec{0}$;

b) $\vec{u} \neq \vec{0}$ và $k \geq 0$;

c) $\vec{u} \neq \vec{0}$ và $k < 0$.

HĐ3. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho hai vectơ không cùng phương $\vec{u} = (x; y)$ và $\vec{v} = (x'; y')$.

a) Xác định toạ độ của các điểm A và B sao cho $\overrightarrow{OA} = \vec{u}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{v}$.

b) Tính AB^2, OA^2, OB^2 theo toạ độ của A và B.

c) Tính $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}$ theo toạ độ của A, B.

Để ý rằng, theo Định lí côsin, ta có: $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = \dfrac{OA^2 + OB^2 - AB^2}{2}$.

> Tích vô hướng của hai vectơ $\vec{u} = (x; y)$ và $\vec{v} = (x'; y')$ được tính theo công thức:
>
> $$\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'.$$

Nhận xét

- Hai vectơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$ vuông góc với nhau khi và chỉ khi $xx' + yy' = 0$.
- Bình phương vô hướng của $\vec{u}(x; y)$ là $\vec{u}^2 = x^2 + y^2$.
- Nếu $\vec{u} \neq \vec{0}$ và $\vec{v} \neq \vec{0}$ thì $\cos\left(\vec{u}, \vec{v}\right) = \dfrac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\left|\vec{u}\right| \cdot \left|\vec{v}\right|} = \dfrac{xx' + yy'}{\sqrt{x^2 + y^2} \cdot \sqrt{x'^2 + y'^2}}$.

Ví dụ 3. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, tính tích vô hướng của các cặp vectơ sau:

a) $\vec{u} = (2; -3)$ và $\vec{v} = (5; 3)$;

b) Hai vectơ đơn vị $\vec{i}$ và $\vec{j}$ tương ứng của các trục Ox, Oy.

Giải

a) Ta có: $\vec{u} \cdot \vec{v} = 2 \cdot 5 + (-3) \cdot 3 = 10 - 9 = 1$.

b) Vì $\vec{i} = (1; 0)$ và $\vec{j} = (0; 1)$ nên $\vec{i} \cdot \vec{j} = 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 = 0$.

Luyện tập 3. Tính tích vô hướng và góc giữa hai vectơ $\vec{u} = (0; -5)$, $\vec{v} = (\sqrt{3}; 1)$.

HĐ4. Cho ba vectơ $\vec{u} = (x_1; y_1)$, $\vec{v} = (x_2; y_2)$, $\vec{w} = (x_3; y_3)$.

a) Tính $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w})$, $\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$ theo toạ độ của các vectơ $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$.

b) So sánh $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w})$ và $\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$.

c) So sánh $\vec{u} \cdot \vec{v}$ và $\vec{v} \cdot \vec{u}$.

Tính chất của tích vô hướng

Với ba vectơ $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ bất kì và mọi số thực k, ta có:

- $\vec{u}\cdot\vec{v}=\vec{v}\cdot\vec{u}$ (*tính chất giao hoán*);
- $\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w})=\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{u}\cdot\vec{w}$ (*tính chất phân phối đối với phép cộng*);
- $(k\vec{u})\cdot\vec{v}=k(\vec{u}\cdot\vec{v})=\vec{u}\cdot(k\vec{v})$.

Chú ý. Từ các tính chất trên, ta có thể chứng minh được:

$\vec{u}\cdot(\vec{v}-\vec{w})=\vec{u}\cdot\vec{v}-\vec{u}\cdot\vec{w}$ (*tính chất phân phối đối với phép trừ*);

$(\vec{u}+\vec{v})^2=\vec{u}^2+2\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{v}^2$; $(\vec{u}-\vec{v})^2=\vec{u}^2-2\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{v}^2$;

$(\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}-\vec{v})=\vec{u}^2-\vec{v}^2$.

Ví dụ 4. *(Ứng dụng của vectơ trong bài toán hình học)*

Cho điểm M thay đổi trên đường tròn tâm O ngoại tiếp tam giác đều ABC cho trước. Chứng minh rằng $MA^2+MB^2+MC^2$ không đổi.

Giải

Cách 1 (*Dùng toạ độ*). Xét hệ trục toạ độ có gốc trùng với tâm O của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Gọi toạ độ của các điểm là $A(x_A;y_A)$, $B(x_B;y_B)$, $C(x_C;y_C)$, $M(x;y)$. Vì tam giác ABC đều nên tâm đường tròn ngoại tiếp $O(0;0)$ đồng thời là trọng tâm của tam giác. Do đó $x_A+x_B+x_C=0$ và $y_A+y_B+y_C=0$.

Vì $OM^2=OA^2=R^2$ nên $x^2+y^2=x_A^2+y_A^2=R^2$.

Vậy $MA^2=(x-x_A)^2+(y-y_A)^2=(x^2+y^2)+(x_A^2+y_A^2)-2xx_A-2yy_A=2R^2-2xx_A-2yy_A$.

Tương tự $MB^2=2R^2-2xx_B-2yy_B$ và $MC^2=2R^2-2xx_C-2yy_C$.

Do đó $MA^2+MB^2+MC^2=6R^2-2x(x_A+x_B+x_C)-2y(y_A+y_B+y_C)=6R^2$ (không đổi).

Cách 2 (*Dùng tích vô hướng*). (H.4.44)

Vì tam giác ABC đều nên tâm O của đường tròn ngoại tiếp đồng thời là trọng tâm của tam giác. Vậy $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\vec{0}$.

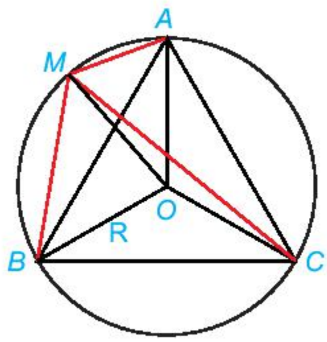
Giả sử (O) có bán kính R. Ta có:

$$MA^2+MB^2+MC^2=\overrightarrow{MA}^2+\overrightarrow{MB}^2+\overrightarrow{MC}^2$$

$$=\left(\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OA}\right)^2+\left(\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OB}\right)^2+\left(\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OC}\right)^2$$

$$=3\overrightarrow{MO}^2+2\overrightarrow{MO}\cdot\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{MO}\cdot\overrightarrow{OB}+2\overrightarrow{MO}\cdot\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OA}^2+\overrightarrow{OB}^2+\overrightarrow{OC}^2$$

$$=3MO^2+2\overrightarrow{MO}\cdot\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}\right)+3R^2=3R^2+2\overrightarrow{MO}\cdot\vec{0}+3R^2=6R^2.$$



Hình 4.44

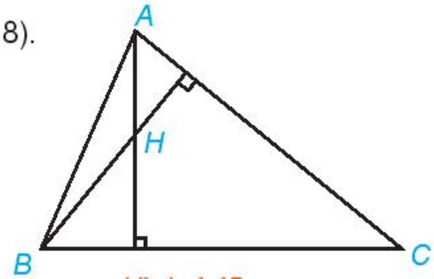
Vậy $MA^2+MB^2+MC^2$ không đổi khi M thay đổi trên (O).

Luyện tập 4. Cho tam giác ABC với $A(-1; 2)$, $B(8; -1)$, $C(8; 8)$. Gọi H là trực tâm của tam giác.

a) Chứng minh rằng $\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC} = \vec{0}$ và $\overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{CA} = \vec{0}$.

b) Tìm toạ độ của H.

c) Giải tam giác ABC.

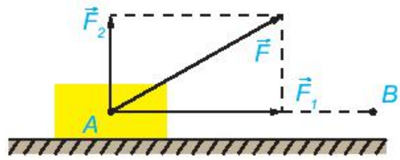


Hình 4.45

Vận dụng. Một lực $\vec{F}$ không đổi tác động vào một vật và điểm đặt của lực chuyển động thẳng từ A đến B. Lực $\vec{F}$ được phân tích thành hai lực thành phần là $\vec{F_1}$ và $\vec{F_2}$ ($\vec{F} = \vec{F_1} + \vec{F_2}$).

a) Dựa vào tính chất của tích vô hướng, hãy giải thích vì sao công sinh bởi lực $\vec{F}$ (đã được đề cập ở trên) bằng tổng của các công sinh bởi các lực $\vec{F_1}$ và $\vec{F_2}$.

b) Giả sử các lực thành phần $\vec{F_1}$, $\vec{F_2}$ tương ứng cùng phương, vuông góc với phương chuyển động của vật. Hãy tìm mối quan hệ giữa các công sinh bởi lực $\vec{F}$ và lực $\vec{F_1}$.



Hình 4.46

BÀI TẬP

4.21. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, hãy tính góc giữa hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ trong mỗi trường hợp sau:

a) $\vec{a} = (-3; 1)$, $\vec{b} = (2; 6)$; b) $\vec{a} = (3; 1)$, $\vec{b} = (2; 4)$; c) $\vec{a} = (-\sqrt{2}; 1)$, $\vec{b} = (2; -\sqrt{2})$.

4.22. Tìm điều kiện của $\vec{u}, \vec{v}$ để:

a) $\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}|$; b) $\vec{u} \cdot \vec{v} = -|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|$.

4.23. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho hai điểm $A(1; 2)$, $B(-4; 3)$. Gọi $M(t; 0)$ là một điểm thuộc trục hoành.

a) Tính $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BM}$ theo t.

b) Tìm t để $\widehat{AMB} = 90^\circ$.

4.24. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho ba điểm không thẳng hàng $A(-4; 1)$, $B(2; 4)$, $C(2; -2)$.

a) Giải tam giác ABC.

b) Tìm toạ độ trực tâm H của tam giác ABC.

4.25. Chứng minh rằng với mọi tam giác ABC, ta có:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}\sqrt{\overrightarrow{AB}^2 \cdot \overrightarrow{AC}^2 - \left(\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}\right)^2}.$$

4.26. Cho tam giác ABC có trọng tâm G. Chứng minh rằng với mọi điểm M, ta có:

$$MA^2 + MB^2 + MC^2 = 3MG^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2.$$

BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG IV

A – TRẮC NGHIỆM

4.27. Trong mặt phẳng toạ độ, cặp vectơ nào sau đây có cùng phương?

A. $\vec{u}=(2;3)$ và $\vec{v}=\left(\frac{1}{2};6\right)$.

B. $\vec{a}=(\sqrt{2};6)$ và $\vec{b}=(1;3\sqrt{2})$.

C. $\vec{i}=(0;1)$ và $\vec{j}=(1;0)$.

D. $\vec{c}=(1;3)$ và $\vec{d}=(2;-6)$.

4.28. Trong mặt phẳng toạ độ, cặp vectơ nào sau đây vuông góc với nhau?

A. $\vec{u}=(2;3)$ và $\vec{v}=(4;6)$.

B. $\vec{a}=(1;-1)$ và $\vec{b}=(-1;1)$.

C. $\vec{z}=(a;b)$ và $\vec{t}=(-b;a)$.

D. $\vec{n}=(1;1)$ và $\vec{k}=(2;0)$.

4.29. Trong mặt phẳng toạ độ, vectơ nào sau đây có độ dài bằng 1?

A. $\vec{a}=(1;1)$.

B. $\vec{b}=(1;-1)$.

C. $\vec{c}=\left(2;\frac{1}{2}\right)$.

D. $\vec{d}=\left(\frac{1}{\sqrt{2}};\frac{-1}{\sqrt{2}}\right)$.

4.30. Góc giữa vectơ $\vec{a}=(1;-1)$ và vectơ $\vec{b}=(-2;0)$ có số đo bằng:

A. 90°.

B. 0°.

C. 135°.

D. 45°.

4.31. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $(\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{c}=\vec{a}(\vec{b}\cdot\vec{c})$.

B. $(\vec{a}\cdot\vec{b})^2=\vec{a}^2\cdot\vec{b}^2$.

C. $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\sin(\vec{a},\vec{b})$.

D. $\vec{a}\cdot(\vec{b}-\vec{c})=\vec{a}\cdot\vec{b}-\vec{a}\cdot\vec{c}$.

4.32. Cho hình vuông $ABCD$ có cạnh a. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BD})=45°$.

B. $(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{BC})=45°$ và $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BC}=a^2$.

C. $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=a^2\sqrt{2}$.

D. $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BD}=-a^2$.

B – TỰ LUẬN

4.33. Trên cạnh BC của tam giác ABC lấy điểm M sao cho $MB = 3MC$.

a) Tìm mối liên hệ giữa hai vectơ $\overrightarrow{MB}$ và $\overrightarrow{MC}$.

b) Biểu thị vectơ $\overrightarrow{AM}$ theo hai vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$.

4.34. Cho hình bình hành *ABCD*. Chứng minh rằng với mọi điểm *M*, ta có:

$$\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MD}.$$

4.35. Trong mặt phẳng toạ độ *Oxy*, cho $A(2;1), B(-2;5)$ và $C(-5;2)$.

a) Tìm toạ độ của các vectơ $\overrightarrow{BA}$ và $\overrightarrow{BC}$.

b) Chứng minh rằng A, B, C là ba đỉnh của một tam giác vuông. Tính diện tích và chu vi của tam giác đó.

c) Tìm toạ độ trọng tâm *G* của tam giác *ABC*.

d) Tìm toạ độ của điểm *D* sao cho tứ giác *BCAD* là một hình bình hành.

4.36. Trong mặt phẳng toạ độ *Oxy*, cho $A(1;2), B(3;4), C(-1;-2)$ và $D(6;5)$.

a) Tìm toạ độ của các vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{CD}$.

b) Hãy giải thích tại sao các vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{CD}$ cùng phương.

c) Giả sử *E* là điểm có toạ độ $(a;1)$. Tìm *a* để các vectơ $\overrightarrow{AC}$ và $\overrightarrow{BE}$ cùng phương.

d) Với *a* tìm được, hãy biểu thị vectơ $\overrightarrow{AE}$ theo các vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$.

4.37. Cho vectơ $\vec{a} \neq \vec{0}$. Chứng minh rằng $\frac{1}{|\vec{a}|}\vec{a}$ (hay còn được viết là $\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$) là một vectơ đơn vị, cùng hướng với vectơ $\vec{a}$.

4.38. Cho ba vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{u}$ với $|\vec{a}|=|\vec{b}|=1$ và $\vec{a} \perp \vec{b}$. Xét một hệ trục *Oxy* với các vectơ đơn vị $\vec{i}=\vec{a}, \vec{j}=\vec{b}$. Chứng minh rằng:

a) Vectơ $\vec{u}$ có toạ độ là $(\vec{u}\cdot\vec{a}; \vec{u}\cdot\vec{b})$.

b) $\vec{u}=(\vec{u}\cdot\vec{a})\vec{a}+(\vec{u}\cdot\vec{b})\vec{b}$.

4.39. Trên sông, một ca nô chuyển động thẳng đều theo hướng S15°E với vận tốc có độ lớn bằng 20 km/h. Tính vận tốc riêng của ca nô, biết rằng, nước trên sông chảy về hướng đông với vận tốc có độ lớn bằng 3 km/h.

CHƯƠNG V
CÁC SỐ ĐẶC TRƯNG CỦA MẪU SỐ LIỆU KHÔNG GHÉP NHÓM

"Thống kê là cơ sở của khoa học".
Karl Pearson (nhà thống kê người Anh, 1857 – 1936)

Bài 12 SỐ GẦN ĐÚNG VÀ SAI SỐ

THUẬT NGỮ
- Số gần đúng
- Sai số tuyệt đối
- Độ chính xác
- Sai số tương đối
- Số quy tròn

KIẾN THỨC, KĨ NĂNG
- Hiểu khái niệm số gần đúng, sai số tuyệt đối.
- Xác định số gần đúng của một số với độ chính xác cho trước.
- Xác định sai số tương đối của số gần đúng.
- Xác định số quy tròn của số gần đúng với độ chính xác cho trước.
- Biết sử dụng máy tính cầm tay để tính toán với các số gần đúng.

Đỉnh Everest được mệnh danh là "nóc nhà của thế giới", bởi đây là đỉnh núi cao nhất trên Trái Đất so với mực nước biển. Có rất nhiều con số khác nhau đã từng được công bố về chiều cao của đỉnh Everest:

8 848 m; 8 848,13 m; 8 844,43 m; 8 850 m;...

Vì sao lại có nhiều kết quả khác nhau như vậy và đâu là con số chính xác? Chúng ta sẽ cùng tìm câu trả lời trong bài học này, sau khi tìm hiểu về số gần đúng và sai số.

Đỉnh Everest

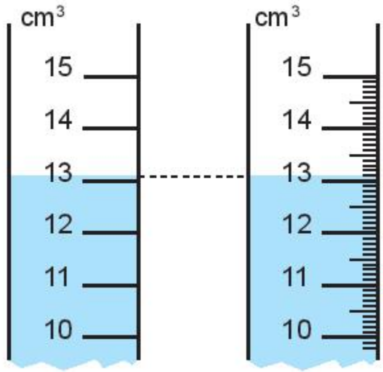
1. SỐ GẦN ĐÚNG

HĐ1. Ngày 8-12-2020, Trung Quốc và Nepal ra thông cáo chung khẳng định chiều cao mới đo được của đỉnh núi cao nhất thế giới Everest là 8 848,86 m.

(Theo *Tuoitre.vn*)

Trong các số được đưa ra ở tình huống mở đầu, số nào gần nhất với số được công bố ở trên?

HĐ2. Trang và Hoà thực hiện đo thể tích một cốc nước bằng hai ống đong có vạch chia được kết quả như Hình 5.1. Hãy cho biết số đo thể tích trên mỗi ống.



Hình 5.1

> Trong nhiều trường hợp, ta không biết hoặc khó biết số đúng (kí hiệu là $\bar{a}$) mà chỉ tìm được giá trị khác xấp xỉ nó. Giá trị này được gọi là **số gần đúng**, kí hiệu là a.

Chẳng hạn, các số đo khác nhau về chiều cao của đỉnh Everest trong tình huống mở đầu đều là các số gần đúng.

? Hãy lấy một ví dụ khác về số gần đúng.

Ví dụ 1. Gọi d là độ dài đường chéo của hình vuông cạnh bằng 1. Trong hai số $\sqrt{2}$ và 1,41, số nào là số đúng, số nào là số gần đúng của d?

Giải

Hình vuông có cạnh bằng 1 có độ dài của đường chéo là $d = 1\cdot\sqrt{2} = \sqrt{2}$. Vậy $\sqrt{2}$ là số đúng; 1,41 là số gần đúng của d.

Luyện tập 1. Gọi P là chu vi của đường tròn bán kính 1 cm. Hãy tìm một giá trị gần đúng của P.

Chú ý. Ta có thể sử dụng máy tính cầm tay để tìm giá trị gần đúng của các biểu thức chứa các số vô tỉ như $\pi, \sqrt{a}, \sqrt[3]{a}, \ldots$ Chẳng hạn, dùng máy tính cầm tay để tính $2^9\cdot\sqrt{3}$, bấm các phím như sau:

[2] [$x^\blacksquare$] [9] [▶] [×] [$\sqrt{\blacksquare}$] [3] [SHIFT] [MODE] [6] [3] [=]

Kết quả nhận được có ba chữ số thập phân sau dấu phẩy là 886,810.

2. SAI SỐ TUYỆT ĐỐI VÀ SAI SỐ TƯƠNG ĐỐI

a. Sai số tuyệt đối

HĐ3. Trong HĐ2, Hoà dùng kính lúp để quan sát mực nước trên ống đo thứ hai được hình ảnh như Hình 5.2. Kí hiệu $\bar{a}$ (cm^3) là số đo thể tích của nước.

Hình 5.2

Quan sát hình vẽ để so sánh $|13 - \bar{a}|$ và $|13,1 - \bar{a}|$ rồi cho biết trong hai số đo thể tích 13 cm^3 và 13,1 cm^3, số đo nào gần với thể tích của cốc nước hơn.

Giá trị $|a - \overline{a}|$ phản ánh mức độ sai lệch giữa số đúng $\overline{a}$ và số gần đúng a, được gọi là sai số tuyệt đối của số gần đúng a, kí hiệu là Δ_a, tức là:

$$\Delta_a = |a - \overline{a}|.$$

Chú ý

- Trên thực tế, nhiều khi ta không biết $\overline{a}$ nên cũng không biết Δ_a. Tuy nhiên, ta có thể đánh giá được Δ_a không vượt quá một số dương d nào đó.

  Chẳng hạn, trong HĐ3, ta thấy $|13,1 - \overline{a}| < |13,1 - 13| = 0,1$ (cm³).

  Vậy với $a = 13,1$ (cm³), sai số tuyệt đối của a không vượt quá 0,1 cm³.
- Nếu $\Delta_a \leq d$ thì $a - d \leq \overline{a} \leq a + d$, khi đó ta viết $\overline{a} = a \pm d$ và hiểu là số đúng $\overline{a}$ nằm trong đoạn $[a - d; a + d]$. Do d càng nhỏ thì a càng gần $\overline{a}$ nên d được gọi là độ chính xác của số gần đúng.

Ví dụ 2. Một công ty sử dụng dây chuyền A để đóng gạo vào bao với khối lượng mong muốn là 5 kg. Trên bao bì ghi thông tin khối lượng là 5 ± 0,2 kg. Gọi $\overline{a}$ là khối lượng thực của một bao gạo do dây chuyền A đóng gói.

a) Xác định số đúng, số gần đúng và độ chính xác.

b) Giá trị của $\overline{a}$ nằm trong đoạn nào?

Giải

a) Khối lượng thực của bao gạo $\overline{a}$ là số đúng. Tuy không biết $\overline{a}$ nhưng ta xem khối lượng bao gạo là 5 kg nên 5 là số gần đúng cho $\overline{a}$. Độ chính xác là $d = 0,2$ (kg).

b) Giá trị của $\overline{a}$ nằm trong đoạn $[5 - 0,2; 5 + 0,2]$ hay $[4,8; 5,2]$.

Luyện tập 2. Một phép đo đường kính nhân tế bào cho kết quả là 5 ± 0,3 µm. Đường kính thực của nhân tế bào thuộc đoạn nào?

Chú ý. Trong các phép đo, độ chính xác d của số gần đúng bằng một nửa đơn vị của thước đo. Chẳng hạn, một thước đo có chia vạch đến xentimét thì mọi giá trị đo nằm giữa 6,5 cm và 7,5 cm đều được coi là 7 cm. Vì vậy, thước đo có thang đo càng nhỏ thì cho giá trị đo càng chính xác.

b. Sai số tương đối

HĐ4. Công ty (trong Ví dụ 2) cũng sử dụng dây chuyền B để đóng gạo với khối lượng chính xác là 20 kg. Trên bao bì ghi thông tin khối lượng là 20 ± 0,5 kg.

Khẳng định "Dây chuyền A tốt hơn dây chuyền B" là đúng hay sai?

Mặc dù độ chính xác của khối lượng bao gạo đóng bằng dây chuyền A nhỏ hơn nhưng do bao gạo đóng bằng dây chuyền B nặng hơn nhiều nên ta không dựa vào sai số tuyệt đối mà dựa vào sai số tương đối để so sánh.

Sai số tương đối của số gần đúng a, kí hiệu là δ_a, là tỉ số giữa sai số tuyệt đối và $|a|$, tức là $\delta_a = \dfrac{\Delta_a}{|a|}$.

Nhận xét. Nếu $\overline{a} = a \pm d$ thì $\Delta_a \le d$, do đó $\delta_a \le \dfrac{d}{|a|}$. Nếu $\dfrac{d}{|a|}$ càng nhỏ thì chất lượng của phép đo hay tính toán càng cao. Người ta thường viết sai số tương đối dưới dạng phần trăm.

Ví dụ 3. Trong một cuộc điều tra dân số, người ta viết dân số của một tỉnh là:

3 574 625 người $\pm$ 50 000 người.

Hãy đánh giá sai số tương đối của số gần đúng này.

Giải

Ta có a = 3 574 625 người và d = 50 000 người, do đó sai số tương đối là:

$$\delta_a \le \frac{d}{|a|} = \frac{50\,000}{3\,574\,625} \approx 1,4\%.$$

Luyện tập 3. Đánh giá sai số tương đối của khối lượng bao gạo được đóng gói theo hai dây chuyền A, B ở Ví dụ 2 và HĐ4. Dựa trên tiêu chí này, dây chuyền nào tốt hơn?

3. QUY TRÒN SỐ GẦN ĐÚNG

Trong thực tế đo đạc và tính toán, nhiều khi ta chỉ cần biết giá trị gần đúng của một đại lượng với độ chính xác nào đó (kể cả khi biết được giá trị đúng của nó). Khi đó, để cho gọn, các số thường được làm tròn (còn gọi là quy tròn).

Số thu được sau khi thực hiện làm tròn số được gọi là số quy tròn. Số quy tròn là một số gần đúng của số ban đầu.

- Đối với chữ số hàng làm tròn:
  - Giữ nguyên nếu chữ số ngay bên phải nó nhỏ hơn 5;
  - Tăng 1 đơn vị nếu chữ số ngay bên phải nó lớn hơn hoặc bằng 5.
- Đối với chữ số sau hàng làm tròn:
  - Bỏ đi nếu ở phần thập phân;
  - Thay bởi các chữ số 0 nếu ở phần số nguyên.

Ví dụ 4

a) Làm tròn số 2 395,3 đến hàng chục, số 18,693 đến hàng phần trăm và số đúng $d \in [5,5;6,5)$ đến hàng đơn vị. Đánh giá sai số tuyệt đối của phép làm tròn số đúng d.

b) Cho số gần đúng a = 2,53 với độ chính xác d = 0,01. Số đúng $\overline{a}$ thuộc đoạn nào? Nếu làm tròn số a thì nên làm tròn đến hàng nào? Vì sao?

Giải

a) Số quy tròn của số 2 395,3 đến hàng chục là 2 360; số quy tròn của số 18,693 đến hàng phần trăm là 18,69. Mọi số đúng $d \in [5,5;6,5)$ khi làm tròn đến hàng đơn vị đều thu được số quy tròn là 6 và sai số tuyệt đối $|d - 6| \le 0,5$.

b) Số đúng $\overline{a}$ thuộc đoạn [2,53 0,01; 2,53 + 0,01] hay [2,52; 2,54]. Khi làm tròn số gần đúng a ta nên làm tròn đến hàng phần chục do chữ số hàng phần trăm của a là chữ số không chắc chắn đúng.

Nhận xét

- Khi thay số đúng bởi số quy tròn đến một hàng nào đó thì sai số tuyệt đối của số quy tròn không vượt quá nửa đơn vị của hàng làm tròn.
- Cho số gần đúng *a* với độ chính xác *d*. Khi được yêu cầu làm tròn số *a* mà không nói rõ làm tròn đến hàng nào thì ta làm tròn số *a* đến hàng thấp nhất mà *d* nhỏ hơn 1 đơn vị của hàng đó.

Ví dụ 5. Cho số gần đúng $a = 581\,268$ với độ chính xác $d = 200$. Hãy viết số quy tròn của số *a*.

Giải

Vì độ chính xác đến hàng trăm ($d = 200$) nên ta làm tròn *a* đến hàng nghìn theo quy tắc làm tròn ở trên. Số quy tròn của *a* là 581 000.

Luyện tập 4. Hãy viết số quy tròn của số gần đúng trong những trường hợp sau:

a) $11\,251\,900 \pm 300$; b) $18{,}2857 \pm 0{,}01$.

Vận dụng. Các nhà vật lí sử dụng hai phương pháp khác nhau để đo tuổi của vũ trụ (đơn vị tỉ năm) lần lượt cho hai kết quả là: $13{,}807 \pm 0{,}026$ và $13{,}799 \pm 0{,}021$.

Hãy đánh giá sai số tương đối của mỗi phương pháp. Căn cứ trên tiêu chí này, phương pháp nào cho kết quả chính xác hơn?

BÀI TẬP

5.1. Trong các số sau, những số nào là số gần đúng?

a) Cân một túi gạo cho kết quả là 10,2 kg.

b) Bán kính Trái Đất là 6 371 km.

c) Trái Đất quay một vòng quanh Mặt Trời mất 365 ngày.

5.2. Giải thích kết quả "Đo độ cao của một ngọn núi cho kết quả là $1\,235 \pm 5$ m" và thực hiện làm tròn số gần đúng.

5.3. Sử dụng máy tính cầm tay tìm số gần đúng cho $\sqrt[3]{7}$ với độ chính xác 0,0005.

5.4. Các nhà vật lí sử dụng ba phương pháp đo hằng số Hubble lần lượt cho kết quả như sau:

$67{,}31 \pm 0{,}96$; $67{,}90 \pm 0{,}55$; $67{,}74 \pm 0{,}46$.

Phương pháp nào chính xác nhất tính theo sai số tương đối?

5.5. An và Bình cùng tính chu vi của hình tròn bán kính 2 cm với hai kết quả như sau:

Kết quả của An: $S_1 = 2\pi R \approx 2 \cdot 3{,}14 \cdot 2 = 12{,}56$ cm;

Kết quả của Bình: $S_2 = 2\pi R \approx 2 \cdot 3{,}1 \cdot 2 = 12{,}4$ cm.

Hỏi:

a) Hai giá trị tính được có phải là các số gần đúng không?

b) Giá trị nào chính xác hơn?

5.6. Làm tròn số 8 316,4 đến hàng chục và 9,754 đến hàng phần trăm rồi tính sai số tuyệt đối của số quy tròn.

Bài 13 CÁC SỐ ĐẶC TRƯNG ĐO XU THẾ TRUNG TÂM

THUẬT NGỮ	KIẾN THỨC, KĨ NĂNG
• Số trung bình • Trung vị • Tứ phân vị • Mốt	• Lựa chọn và tính các số đặc trưng đo xu thế trung tâm của một mẫu số liệu: số trung bình, trung vị, tứ phân vị, mốt. • Giải thích ý nghĩa, vai trò của các số đặc trưng trong mẫu số liệu thực tiễn. • Rút ra kết luận từ ý nghĩa của các số đặc trưng đo xu thế trung tâm.

Hai phương pháp học tiếng Anh khác nhau được áp dụng cho hai lớp A và B có trình độ tiếng Anh tương đương nhau. Sau hai tháng, điểm khảo sát tiếng Anh (thang điểm 10) của hai lớp được cho như hình bên.

2	7	6	3	9
8	6	7	9	2
5	7	5	9	8
8	7	4	3	5
5	4	5	7	7

Lớp A

6	7	6	4	7
9	3	8	7	5
5	6	8	7	4
5	3	10	7	9
6	7	6	7	5

Lớp B

Quan sát hai mẫu số liệu trên, có thể đánh giá được phương pháp học tập nào hiệu quả hơn không?

Để làm được điều đó, người ta thường tính toán các số đặc trưng cho mỗi mẫu số liệu rồi so sánh.

Bài học này sẽ giới thiệu về các số đặc trưng đo xu thế trung tâm, tức là các số cho ta biết thông tin về vị trí trung tâm của mẫu số liệu và được dùng làm đại diện cho mẫu số liệu.

1. SỐ TRUNG BÌNH VÀ TRUNG VỊ

a. Số trung bình

Từ mẫu số liệu về điểm số của hai lớp A, B trên, em hãy:

HĐ1. Tính trung bình cộng điểm khảo sát tiếng Anh của mỗi lớp A và B.

HĐ2. Dựa trên điểm trung bình, hãy cho biết phương pháp học tập nào hiệu quả hơn.

Số trung bình (số trung bình cộng) của mẫu số liệu $x_1, x_2, \ldots, x_n$, kí hiệu là $\overline{x}$, được tính bằng công thức:

$$\overline{x} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}.$$

Chú ý. Trong trường hợp mẫu số liệu cho dưới dạng bảng tần số thì số trung bình được tính theo công thức:

$$\overline{x} = \frac{m_1x_1 + m_2x_2 + \ldots + m_kx_k}{n},$$

trong đó m_k là tần số của giá trị x_k và $n = m_1 + m_2 + \ldots + m_k$.

Ví dụ 1. Thống kê số cuốn sách mỗi bạn trong lớp đã đọc trong năm 2021, An thu được kết quả như bảng bên. Hỏi trong năm 2021, trung bình mỗi bạn trong lớp đọc bao nhiêu cuốn sách?

Số cuốn sách	1	2	3	4	5
Số bạn	3	5	15	10	7

Giải

Số bạn trong lớp là $n = 3 + 5 + 15 + 10 + 7 = 40$ (bạn).

Trong năm 2021, trung bình mỗi bạn trong lớp đọc số cuốn sách là:

$$\frac{3\cdot 1 + 5\cdot 2 + 15\cdot 3 + 10\cdot 4 + 7\cdot 5}{40} = 3{,}325 \text{ (cuốn).}$$

Ý nghĩa. Số trung bình là giá trị trung bình cộng của các số trong mẫu số liệu, nó cho biết vị trí trung tâm của mẫu số liệu và có thể dùng để đại diện cho mẫu số liệu.

Luyện tập 1. Bảng sau cho biết thời gian chạy cự li 100 m của các bạn trong lớp (đơn vị giây):

Thời gian	12	13	14	15	16
Số bạn	5	7	10	8	6

Hãy tính thời gian chạy trung bình cự li 100 m của các bạn trong lớp.

b. Trung vị

HĐ3. Một công ty nhỏ gồm 1 giám đốc và 5 nhân viên, thu nhập mỗi tháng của giám đốc là 20 triệu đồng, của nhân viên là 4 triệu đồng.

a) Tính thu nhập trung bình của các thành viên trong công ty.

b) Thu nhập trung bình có phản ánh đúng thu nhập của nhân viên công ty không?

Trong trường hợp mẫu số liệu có giá trị bất thường (rất lớn hoặc rất bé so với đa số các giá trị khác), người ta không dùng số trung bình để đo xu thế trung tâm mà dùng trung vị.

Để tìm trung vị của một mẫu số liệu, ta thực hiện như sau:
- Sắp xếp các giá trị trong mẫu số liệu theo thứ tự không giảm.
- Nếu số giá trị của mẫu số liệu là số lẻ thì giá trị chính giữa của mẫu là trung vị. Nếu là số chẵn thì trung vị là trung bình cộng của hai giá trị chính giữa của mẫu.

Ví dụ 2. Hãy tìm trung vị cho mẫu số liệu về lương của giám đốc và nhân viên công ty được cho trong HĐ3.

Giải

Để tìm trung vị của mẫu số liệu trên, ta làm như sau:

• Sắp xếp số liệu theo thứ tự không giảm:

$$4 \qquad 4 \qquad \underbrace{4 \qquad 4}_{\textit{Hai giá trị chính giữa}} \qquad 4 \qquad 20.$$

• Dãy trên có hai giá trị chính giữa cùng bằng 4. Vậy trung vị của mẫu số liệu cũng bằng 4.

Trong mẫu số liệu được sắp xếp trên, số phần tử ở bên trái trung vị và số phần tử ở bên phải trung vị bằng nhau và bằng 3. Lương của giám đốc cao hơn hẳn số trung bình, đây chính là *giá trị bất thường*. Nếu ta thay lương của giám đốc là 30; 40; 50;... (triệu đồng) thì trung vị vẫn không thay đổi trong khi số trung bình sẽ thay đổi.

Ý nghĩa. Trung vị là giá trị chia đôi mẫu số liệu, nghĩa là trong mẫu số liệu được sắp xếp theo thứ tự không giảm thì giá trị trung vị ở vị trí chính giữa. Trung vị không bị ảnh hưởng bởi giá trị bất thường trong khi số trung bình bị ảnh hưởng bởi giá trị bất thường.

Luyện tập 2. Chiều dài (đơn vị feet) của 7 con cá voi trưởng thành được cho như sau:

48   53   51   31   53   112   52.

Tìm số trung bình và trung vị của mẫu số liệu trên. Trong hai số đó, số nào phù hợp hơn để đại diện cho chiều dài của 7 con cá voi trưởng thành này?

2. TỨ PHÂN VỊ

HĐ4. Điểm (thang điểm 100) của 12 thí sinh cao điểm nhất trong một cuộc thi như sau:

58 74 92 81 97 88 75 69 87 69 75 77.

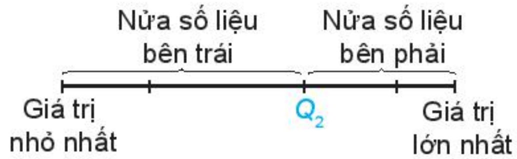
Ban tổ chức muốn trao các giải Nhất, Nhì, Ba, Tư cho các thí sinh này, mỗi giải trao cho 25% số thí sinh (3 thí sinh).

Em hãy giúp ban tổ chức xác định các ngưỡng điểm để phân loại thí sinh.

Để tìm các tứ phân vị của mẫu số liệu có *n* giá trị, ta làm như sau:

- Sắp xếp mẫu số liệu theo thứ tự không giảm.
- Tìm trung vị. Giá trị này là Q_2.
- Tìm trung vị của nửa số liệu bên trái Q_2 (không bao gồm Q_2 nếu *n* lẻ). Giá trị này là Q_1.
- Tìm trung vị của nửa số liệu bên phải Q_2 (không bao gồm Q_2 nếu *n* lẻ). Giá trị này là Q_3.

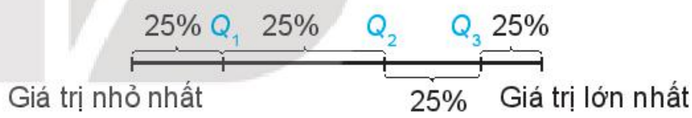
Q_1, Q_2, Q_3 được gọi là các tứ phân vị của mẫu số liệu.



Hình 5.3b

Chú ý. Q_1 được gọi là tứ phân vị thứ nhất hay tứ phân vị dưới, Q_3 được gọi là tứ phân vị thứ ba hay tứ phân vị trên.

Ý nghĩa. Các điểm Q_1, Q_2, Q_3 chia mẫu số liệu đã sắp xếp theo thứ tự từ nhỏ đến lớn thành bốn phần, mỗi phần đều chứa 25% giá trị (H.5.3a).



Hình 5.3a. Các tứ phân vị

Ví dụ 3. Hàm lượng Natri (đơn vị miligam, 1 mg = 0,001 g) trong 100 g một số loại ngũ cốc được cho như sau:

0 340 70 140 200 180 210 150 100 130

140 180 190 160 290 50 220 180 200 210.

Hãy tìm các tứ phân vị. Các tứ phân vị này cho ta thông tin gì?

Giải

- Sắp xếp các giá trị này theo thứ tự không giảm:

$$0\ 50\ 70\ 100\ 130\ 140\ 140\ 150\ 160\ \underbrace{180\ 180}_{\text{Hai giá trị chính giữa}}\ 180\ 190\ 200\ 200\ 210\ 210\ 220\ 290\ 340.$$

- Vì $n = 20$ là số chẵn nên Q_2 là trung bình cộng của hai giá trị chính giữa:

$$Q_2 = (180 + 180) : 2 = 180.$$

- Ta tìm Q_1 là trung vị của nửa số liệu bên trái Q_2:

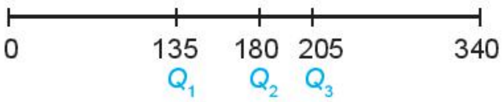
0 50 70 100 130 140 140 150 160 180

và tìm được $Q_1 = (130 + 140) : 2 = 135$.

- Ta tìm Q_3 là trung vị của nửa số liệu bên phải Q_2:

180 180 190 200 200 210 210 220 290 340

và tìm được $Q_3 = (200 + 210) : 2 = 205$.



Hình 5.4. Hình ảnh về sự phân bố của mẫu số liệu

Các tứ phân vị cho ta hình ảnh phân bố của mẫu số liệu. Khoảng cách từ Q_1 đến Q_2 là 45 trong khi khoảng cách từ Q_2 đến Q_3 là 25. Điều này cho thấy mẫu số liệu tập trung với mật độ cao ở bên phải của Q_2 và mật độ thấp ở bên trái của Q_2 (H.5.4).

Luyện tập 3. Bảng sau đây cho biết số lần học tiếng Anh trên Internet trong một tuần của một số học sinh lớp 10:

Số lần	0	1	2	3	4	5
Số học sinh	2	4	6	12	8	3

Hãy tìm các tứ phân vị cho mẫu số liệu này.

3. MỐT

HĐ5. Một cửa hàng giày thể thao đã thống kê cỡ giày của một số khách hàng nam được chọn ngẫu nhiên cho kết quả như sau:

38 39 39 38 40 41 39 39 38 39 39 39 40 39 39.

a) Tính cỡ giày trung bình. Số trung bình này có ý nghĩa gì với cửa hàng không?

b) Cửa hàng nên nhập cỡ giày nào với số lượng nhiều nhất?

> **Mốt** của mẫu số liệu là giá trị xuất hiện với tần số lớn nhất.

Ý nghĩa. Có thể dùng mốt để đo xu thế trung tâm của mẫu số liệu khi mẫu số liệu có nhiều giá trị trùng nhau.

Ví dụ 4. Thời gian truy cập Internet (đơn vị giờ) trong một ngày của một số học sinh lớp 10 được cho như sau:

0 0 1 1 1 3 4 4 5 6.

Tìm mốt cho mẫu số liệu này.

Giải

Vì số học sinh truy cập Internet 1 giờ mỗi ngày là lớn nhất (có 3 học sinh) nên mốt là 1.

Nhận xét

- Mốt có thể không là duy nhất. Chẳng hạn, với mẫu số liệu

  8 7 10 9 7 5 7 8 8

  các số 7; 8 đều xuất hiện với số lần lớn nhất (3 lần) nên mẫu số liệu này có hai mốt là 7 và 8.
- Khi các giá trị trong mẫu số liệu xuất hiện với tần số như nhau thì mẫu số liệu không có mốt.

- Mốt còn được định nghĩa cho mẫu dữ liệu định tính (dữ liệu không phải là số). Ví dụ báo Tuổi trẻ đã thực hiện thăm dò ý kiến của bạn đọc với câu hỏi "Theo bạn, VFF nên chọn huấn luyện viên ngoại hay nội dẫn dắt đội tuyển bóng đá nam Việt Nam?".

  Tại thời điểm 21 giờ ngày 27-4-2021 kết quả bình chọn như sau:

Lựa chọn	Huấn luyện viên nội	Huấn luyện viên ngoại	Ý kiến khác
Số lượt bình chọn	1 897	3 781	747

  Trong mẫu dữ liệu này, lựa chọn "huấn luyện viên ngoại" có nhiều người bình chọn nhất, được gọi là *mốt*.

Vận dụng. Hãy tính các số đặc trưng đo xu thế trung tâm cho mẫu số liệu về điểm khảo sát của lớp A và lớp B ở đầu bài học để phân tích và so sánh hiệu quả học tập của hai phương pháp này.

BÀI TẬP

5.7. Tìm số trung bình, trung vị, mốt và tứ phân vị của mỗi mẫu số liệu sau đây:

a) Số điểm mà năm vận động viên bóng rổ ghi được trong một trận đấu:

9 8 15 8 20.

b) Giá của một số loại giày (đơn vị nghìn đồng):

350 300 650 300 450 500 300 250.

c) Số kênh được chiếu của một số hãng truyền hình cáp:

36 38 33 34 32 30 34 35.

5.8. Hãy chọn số đặc trưng đo xu thế trung tâm của mỗi mẫu số liệu sau. Giải thích và tính giá trị của số đặc trưng đó.

a) Số mặt trăng đã biết của các hành tinh:

Hành tinh	Thuỷ tinh	Kim tinh	Trái Đất	Hoả tinh	Mộc tinh	Thổ tinh	Thiên Vương tinh	Hải Vương tinh
Số mặt trăng	0	0	1	2	63	34	27	13

(Theo *NASA*)

b) Số đường chuyền thành công trong một trận đấu của một số cầu thủ bóng đá:

32 24 20 14 23.

c) Chỉ số IQ của một nhóm học sinh: 60 72 63 83 68 74 90 86 74 80.

d) Các sai số trong một phép đo: 10 15 18 15 14 13 42 15 12 14 42.

5.9. Số lượng học sinh giỏi Quốc gia năm học 2018 – 2019 của 10 trường Trung học phổ thông được cho như sau:

0 0 4 0 0 0 10 0 6 0.

a) Tìm số trung bình, mốt, các tứ phân vị của mẫu số liệu trên.

b) Giải thích tại sao tứ phân vị thứ nhất và trung vị trùng nhau.

5.10. Bảng sau đây cho biết số chỗ ngồi của một số sân vận động được sử dụng trong Giải Bóng đá Vô địch Quốc gia Việt Nam năm 2018 (số liệu gần đúng).

Sân vận động	Cẩm Phả	Thiên Trường	Hàng Đẫy	Thanh Hoá	Mỹ Đình
Số chỗ ngồi	20 120	21 315	23 405	20 120	37 546

(Theo *vov.vn*)

Các giá trị số trung bình, trung vị, mốt bị ảnh hưởng thế nào nếu bỏ đi số liệu chỗ ngồi của Sân vận động Quốc gia Mỹ Đình?

Em có biết?

John Graunt (1620 – 1674) là một nhà buôn người Anh. Ông được xem là người đầu tiên đưa ra suy luận về tổng thể dựa trên thông tin của một phần (mẫu). Năm 1662, khi điều tra nhân khẩu, ông nhận ra rằng trung bình mỗi năm trong 11 gia đình có 3 người mất. Với giả thiết tỉ lệ này không đổi trong toàn bộ dân cư London và biết rằng trung bình trong một năm ở London có 13 000 người mất, ông đã ước lượng được số hộ gia đình ở London khoảng 48 000. Và với giả thiết trung bình mỗi gia đình có 8 người, ông ước lượng được dân số của London khoảng 384 000 người.

John Graunt (1620 – 1674)

Bài 14 CÁC SỐ ĐẶC TRƯNG ĐO ĐỘ PHÂN TÁN

THUẬT NGỮ
- Khoảng biến thiên
- Khoảng tứ phân vị
- Phương sai
- Độ lệch chuẩn

KIẾN THỨC, KĨ NĂNG
- Tính các số đặc trưng đo độ phân tán.
- Biết ý nghĩa của các số đặc trưng đo độ phân tán.
- Phát hiện các giá trị bất thường sử dụng các công cụ toán học.

Dưới đây là điểm trung bình môn học kì I của hai bạn An và Bình:

	Toán	Vật lí	Hoá học	Ngữ văn	Lịch sử	Địa lí	Tin học	Tiếng Anh
An	9,2	8,7	9,5	6,8	8,0	8,0	7,3	6,5
Bình	8,2	8,1	8,0	7,8	8,3	7,9	7,6	8,1

Điểm trung bình môn học kì của An và Bình đều là 8,0 nhưng rõ ràng Bình "học đều" hơn An. Có thể dùng những số đặc trưng nào để đo mức độ "học đều"?

Bài này sẽ giới thiệu một vài số đặc trưng như vậy.

1. KHOẢNG BIẾN THIÊN VÀ KHOẢNG TỨ PHÂN VỊ

HĐ1. Một cổ động viên của câu lạc bộ Everton, Anh đã thống kê điểm số mà hai câu lạc bộ Leicester City và Everton đạt được trong năm mùa giải Ngoại hạng Anh gần đây, từ mùa giải 2014 – 2015 đến mùa giải 2018 – 2019 như sau:

Leicester City: 41 81 44 47 52.

Everton: 47 47 61 49 54.

Cổ động viên đó cho rằng, Everton thi đấu ổn định hơn Leicester City. Em có đồng ý với nhận định này không? Vì sao?

Trong 5 mùa giải, điểm thấp nhất, cao nhất của Leicester City lần lượt là 41; 81 trong khi của Everton là 47; 61. Về trực quan, thành tích của Everton ổn định hơn Leicester City. Người ta có nhiều cách để đo sự ổn định này. Cách đơn giản nhất là dùng hiệu số (Điểm cao nhất – Điểm thấp nhất). Giá trị này được gọi là khoảng biến thiên.

> Khoảng biến thiên, kí hiệu là R, là hiệu số giữa giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất trong mẫu số liệu.

Ý nghĩa. Khoảng biến thiên dùng để đo độ phân tán của mẫu số liệu. Khoảng biến thiên càng lớn thì mẫu số liệu càng phân tán.

Ví dụ 1. Điểm kiểm tra học kì môn Toán của các bạn Tổ 1, Tổ 2 lớp 10A được cho như sau:

Tổ 1: 7 8 8 9 8 8 8.

Tổ 2: 10 6 8 9 9 7 8 7 8.

a) Điểm kiểm tra trung bình của hai tổ có như nhau không?

b) Tính các khoảng biến thiên của hai mẫu số liệu. Căn cứ trên chỉ số này, các bạn tổ nào học đồng đều hơn?

Giải

a) Điểm kiểm tra trung bình của hai tổ đều bằng 8.

b) Đối với Tổ 1: Điểm kiểm tra thấp nhất, cao nhất tương ứng là 7; 9. Do đó khoảng biến thiên là: $R_1 = 9 - 7 = 2$.

Đối với Tổ 2: Điểm kiểm tra thấp nhất, cao nhất tương ứng là 6; 10. Do đó khoảng biến thiên là: $R_2 = 10 - 6 = 4$.

Do $R_2 > R_1$ nên ta nói các bạn Tổ 1 học đều hơn các bạn Tổ 2.

Luyện tập 1. Mẫu số liệu sau cho biết chiều cao (đơn vị cm) của các bạn trong tổ:

163 159 172 167 165 168 170 161.

Tính khoảng biến thiên của mẫu số liệu này.

Nhận xét. Sử dụng khoảng biến thiên có ưu điểm là đơn giản, dễ tính toán song khoảng biến thiên chỉ sử dụng thông tin của giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất mà bỏ qua thông tin từ tất cả các giá trị khác. Do đó, khoảng biến thiên rất dễ bị ảnh hưởng bởi các giá trị bất thường.

HĐ2. Trong một tuần, nhiệt độ cao nhất trong ngày (đơn vị °C) tại hai thành phố Hà Nội và Điện Biên được cho như sau:

Hà Nội:	23	25	28	28	32	33	35.
Điện Biên:	16	24	26	26	26	27	28.

a) Tính các khoảng biến thiên của mỗi mẫu số liệu và so sánh.

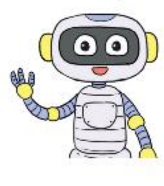
b) Em có nhận xét gì về sự ảnh hưởng của giá trị 16 đến khoảng biến thiên của mẫu số liệu về nhiệt độ cao nhất trong ngày tại Điện Biên?

c) Tính các tứ phân vị và hiệu $Q_3 - Q_1$ cho mỗi mẫu số liệu. Có thể dùng hiệu này để đo độ phân tán của mẫu số liệu không?

Khoảng tứ phân vị, kí hiệu là Δ_Q, là hiệu số giữa tứ phân vị thứ ba và tứ phân vị thứ nhất, tức là:

$$\Delta_Q = Q_3 - Q_1.$$

Về bản chất, khoảng tứ phân vị là khoảng biến thiên của 50% số liệu chính giữa của mẫu số liệu đã sắp xếp.



Ý nghĩa. Khoảng tứ phân vị cũng là một số đo độ phân tán của mẫu số liệu. Khoảng tứ phân vị càng lớn thì mẫu số liệu càng phân tán.

Chú ý. Một số tài liệu gọi khoảng biến thiên là *biên độ* và khoảng tứ phân vị là *độ trải giữa*.

Ví dụ 2. Mẫu số liệu sau cho biết số ghế trống tại một rạp chiếu phim trong 9 ngày:

7 8 22 20 15 18 19 13 11.

Tìm khoảng tứ phân vị cho mẫu số liệu này.

Giải

Trước hết, ta sắp xếp mẫu số liệu theo thứ tự không giảm:

7 8 11 13 15 18 19 20 22.

Mẫu số liệu gồm 9 giá trị nên trung vị là số ở vị trí chính giữa $Q_2 = 15$.

Nửa số liệu bên trái là 7, 8, 11, 13 gồm 4 giá trị, hai phần tử chính giữa là 8, 11.

Do đó, $Q_1 = (8 + 11) : 2 = 9,5$.

Nửa số liệu bên phải là 18, 19, 20, 22 gồm 4 giá trị, hai phần tử chính giữa là 19, 20.

Do đó, $Q_3 = (19 + 20) : 2 = 19,5$.

Vậy khoảng tứ phân vị cho mẫu số liệu là $\Delta_Q = 19,5 - 9,5 = 10$.

Luyện tập 2. Mẫu số liệu sau đây cho biết số bài hát ở mỗi album trong bộ sưu tập của An:

12 7 10 9 12 9 10 11 10 14.

Hãy tìm khoảng tứ phân vị cho mẫu số liệu này.

2. PHƯƠNG SAI VÀ ĐỘ LỆCH CHUẨN

Khoảng biến thiên chỉ sử dụng thông tin của giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của mẫu số liệu (bỏ qua thông tin của tất cả các giá trị khác), còn khoảng tứ phân vị chỉ sử dụng thông tin của 50% số liệu chính giữa. Có một vài số đặc trưng khác đo độ phân tán sử dụng thông tin của tất cả các giá trị trong mẫu số liệu. Hai trong số đó là *phương sai* và *độ lệch chuẩn*.

Cụ thể là với mẫu số liệu $x_1, x_2, \ldots, x_n$, nếu gọi số trung bình là $\overline{x}$ thì với mỗi giá trị x_i, độ lệch của nó so với giá trị trung bình là $x_i - \overline{x}$.

- Phương sai là giá trị $s^2 = \dfrac{(x_1 - \overline{x})^2 + (x_2 - \overline{x})^2 + \ldots + (x_n - \overline{x})^2}{n}$.
- Căn bậc hai của phương sai, $s = \sqrt{s^2}$, được gọi là độ lệch chuẩn.

Chú ý. Người ta còn sử dụng đại lượng để đo độ phân tán của mẫu số liệu:

$$\hat{s}^2 = \frac{(x_1 - \overline{x})^2 + (x_2 - \overline{x})^2 + \ldots + (x_n - \overline{x})^2}{n-1}.$$

Ý nghĩa. Nếu số liệu càng phân tán thì phương sai và độ lệch chuẩn càng lớn.

Ví dụ 3. Mẫu số liệu sau đây cho biết sĩ số của 5 lớp khối 10 tại một trường Trung học:

43 45 46 41 40.

Tìm phương sai và độ lệch chuẩn cho mẫu số liệu này.

Giải

Số trung bình của mẫu số liệu là: $\overline{x} = \dfrac{43 + 45 + 46 + 41 + 40}{5} = 43$.

Ta có bảng sau:

Giá trị	Độ lệch	Bình phương độ lệch
43	43 – 43 = 0	0
45	45 – 43 = 2	4
46	46 – 43 = 3	9
41	41 – 43 = –2	4
40	40 – 43 = –3	9
Tổng		26

Mẫu số liệu gồm 5 giá trị nên $n = 5$. Do đó phương sai là: $s^2 = \dfrac{26}{5} = 5,2$.

Độ lệch chuẩn là: $s = \sqrt{5,2} \approx 2,28$.

Luyện tập 3. Dùng đồng hồ đo thời gian có độ chia nhỏ nhất đến 0,001 giây để đo 7 lần thời gian rơi tự do của một vật bắt đầu từ điểm A ($v_A = 0$) đến điểm B. Kết quả đo như sau:

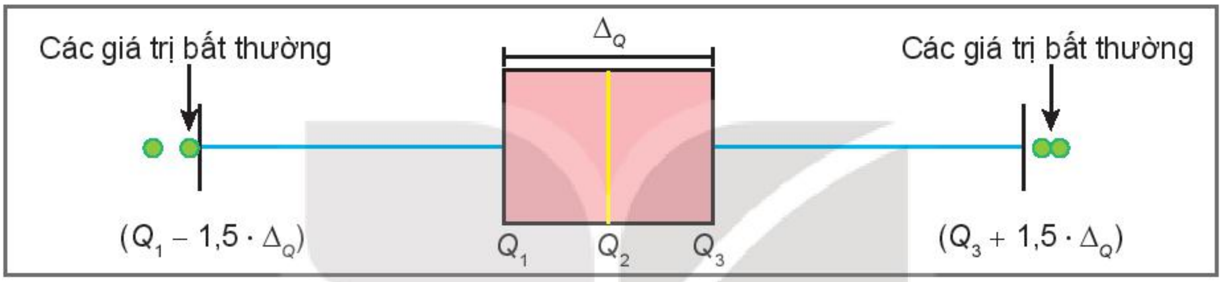
0,398 0,399 0,408 0,410 0,406 0,405 0,402.

(Theo *Bài tập Vật lí 10, Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam, 2018*)

Hãy tính phương sai và độ lệch chuẩn cho mẫu số liệu này. Qua các đại lượng này, em có nhận xét gì về độ chính xác của phép đo trên?

3. PHÁT HIỆN SỐ LIỆU BẤT THƯỜNG HOẶC KHÔNG CHÍNH XÁC BẰNG BIỂU ĐỒ HỘP

Trong mẫu số liệu thống kê, có khi gặp những giá trị quá lớn hoặc quá nhỏ so với đa số các giá trị khác. Những giá trị này được gọi là giá trị bất thường. Chúng xuất hiện trong mẫu số liệu có thể do nhầm lẫn hay sai sót nào đó. Ta có thể dùng biểu đồ hộp để phát hiện những giá trị bất thường này.



Hình 5.5. Biểu đồ hộp

Các giá trị lớn hơn $Q_3 + 1,5 \cdot \Delta_Q$ hoặc bé hơn $Q_1 - 1,5 \cdot \Delta_Q$ được xem là giá trị bất thường.

Ví dụ 4. Hàm lượng Natri (đơn vị mg) trong 100 g một số loại ngũ cốc được cho như sau:

0	340	70	140	200	180	210	150	100	130
140	180	190	160	290	50	220	180	200	210.

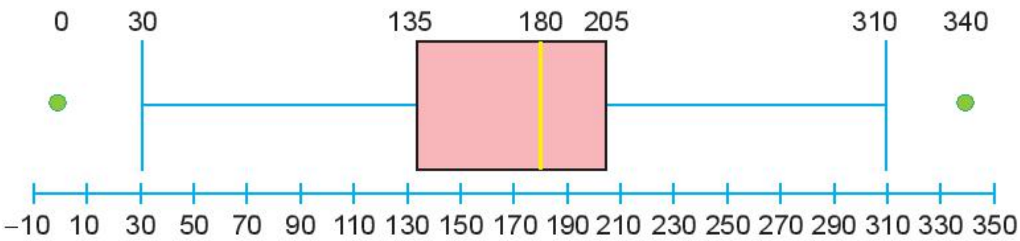
Tìm giá trị bất thường trong mẫu số liệu trên bằng cách sử dụng biểu đồ hộp.

Giải

Từ mẫu số liệu ta tính được $Q_1 = 135$ và $Q_3 = 205$. Do đó, khoảng tứ phân vị là:

$$\Delta_Q = 205 - 135 = 70.$$

Biểu đồ hộp cho mẫu số liệu này là:



Ta có $Q_1 - 1,5 \cdot \Delta_Q = 30$ và $Q_3 + 1,5 \cdot \Delta_Q = 310$ nên trong mẫu số liệu có hai giá trị được xem là bất thường là 340 mg (lớn hơn 310 mg) và 0 mg (bé hơn 30 mg).

Luyện tập 4. Một mẫu số liệu có tứ phân vị thứ nhất là 56 và tứ phân vị thứ ba là 84. Hãy kiểm tra xem trong hai giá trị 10 và 100 giá trị nào được xem là giá trị bất thường.

BÀI TẬP

5.11. Mỗi khẳng định sau đúng hay sai?

(1) Nếu các giá trị của mẫu số liệu càng tập trung quanh giá trị trung bình thì độ lệch chuẩn càng lớn.

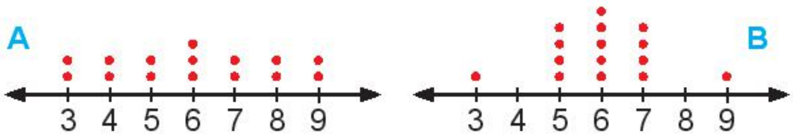
(2) Khoảng biến thiên chỉ sử dụng thông tin của giá trị lớn nhất và bé nhất, bỏ qua thông tin của các giá trị còn lại.

(3) Khoảng tứ phân vị có sử dụng thông tin của giá trị lớn nhất, giá trị bé nhất.

(4) Khoảng tứ phân vị chính là khoảng biến thiên của nửa dưới mẫu số liệu đã sắp xếp.

(5) Các số đo độ phân tán đều không âm.

5.12. Cho hai biểu đồ chấm điểm biểu diễn hai mẫu số liệu A, B như sau:



Không tính toán, hãy cho biết:

a) Hai mẫu số liệu này có cùng khoảng biến thiên và số trung bình không?

b) Mẫu số liệu nào có phương sai lớn hơn?

5.13. Cho mẫu số liệu gồm 10 số dương không hoàn toàn giống nhau. Các số đo độ phân tán (khoảng biến thiên, khoảng tứ phân vị, độ lệch chuẩn) sẽ thay đổi như thế nào nếu:

a) Nhân mỗi giá trị của mẫu số liệu với 2.

b) Cộng mỗi giá trị của mẫu số liệu với 2.

5.14. Từ mẫu số liệu về thuế thuốc lá của 51 thành phố tại một quốc gia, người ta tính được:

Giá trị nhỏ nhất bằng 2,5; $Q_1 = 36$; $Q_2 = 60$; $Q_3 = 100$; giá trị lớn nhất bằng 205.

a) Tỉ lệ thành phố có thuế thuốc lá lớn hơn 36 là bao nhiêu?

b) Chỉ ra hai giá trị sao cho có 50% giá trị của mẫu số liệu nằm giữa hai giá trị này.

c) Tìm khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu.

5.15. Mẫu số liệu sau đây cho biết cân nặng của 10 trẻ sơ sinh (đơn vị kg):

2,977	3,155	3,920	3,412	4,236
2,593	3,270	3,813	4,042	3,387.

Hãy tính khoảng biến thiên, khoảng tứ phân vị và độ lệch chuẩn cho mẫu số liệu này.

5.16. Tỉ lệ thất nghiệp ở một số quốc gia vào năm 2007 (đơn vị %) được cho như sau:

7,8	3,2	7,7	8,7	8,6	8,4	7,2	3,6
5,0	4,4	6,7	7,0	4,5	6,0	5,4.	

Hãy tìm các giá trị bất thường (nếu có) của mẫu số liệu trên.

BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG V

A – TRẮC NGHIỆM

5.17. Khi cân một bao gạo bằng một cân treo với thang chia 0,2 kg thì độ chính xác *d* là

A. 0,1 kg. B. 0,2 kg. C. 0,3 kg. D. 0,4 kg.

5.18. Trong hai mẫu số liệu, mẫu nào có phương sai lớn hơn thì có độ lệch chuẩn lớn hơn, đúng hay sai?

A. Đúng. B. Sai.

5.19. Có 25% giá trị của mẫu số liệu nằm giữa Q_1 và Q_3, đúng hay sai?

A. Đúng. B. Sai.

5.20. Số đặc trưng nào sau đây đo độ phân tán của mẫu số liệu?

A. Số trung bình. B. Mốt. C. Trung vị. D. Độ lệch chuẩn.

5.21. Điểm trung bình môn học kì I một số môn học của bạn An là 8; 9; 7; 6; 5; 7; 3. Nếu An được cộng thêm mỗi môn 0,5 điểm chuyên cần thì các số đặc trưng nào sau đây của mẫu số liệu không thay đổi?

A. Số trung bình. B. Trung vị. C. Độ lệch chuẩn. D. Tứ phân vị.

B – TỰ LUẬN

5.22. Lương khởi điểm của 5 sinh viên vừa tốt nghiệp tại một trường đại học (đơn vị triệu đồng) là:

3,5 9,2 9,2 9,5 10,5.

a) Giải thích tại sao nên dùng trung vị để thể hiện mức lương khởi điểm của sinh viên tốt nghiệp từ trường đại học này.

b) Nên dùng khoảng biến thiên hay khoảng tứ phân vị để đo độ phân tán? Vì sao?

5.23. Điểm Toán và điểm Tiếng Anh của 11 học sinh lớp 10 được cho trong bảng sau:

Học sinh	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
Toán	62	91	43	31	57	63	80	37	43	5	78
Tiếng Anh	65	57	55	37	62	70	73	49	65	41	64

Hãy so sánh mức độ học đều của học sinh trong môn Tiếng Anh và môn Toán thông qua các số đặc trưng: khoảng biến thiên, khoảng tứ phân vị, độ lệch chuẩn.

5.24. Bảng sau cho biết dân số của các tỉnh/thành phố Đồng bằng Bắc Bộ năm 2018 (đơn vị triệu người).

Tỉnh/thành phố	Dân số
Hà Nội	7,52
Vĩnh Phúc	1,09
Bắc Ninh	1,25
Quảng Ninh	1,27
Hải Dương	1,81
Hải Phòng	2,01

Tỉnh/thành phố	Dân số
Hưng Yên	1,19
Thái Bình	1,79
Hà Nam	0,81
Nam Định	1,85
Ninh Bình	0,97

(Theo *Tổng cục Thống kê*)

a) Tìm số trung bình và trung vị của mẫu số liệu trên.

b) Giải thích tại sao số trung bình và trung vị lại có sự sai khác nhiều.

c) Nên sử dụng số trung bình hay trung vị để đại diện cho dân số của các tỉnh thuộc Đồng bằng Bắc Bộ?

5.25. Hai mẫu số liệu sau đây cho biết số lượng trường Trung học phổ thông ở mỗi tỉnh/thành phố thuộc Đồng bằng sông Hồng và Đồng bằng sông Cửu Long năm 2017:

Đồng bằng sông Hồng: 187 34 35 46 54 57 37 39 23 57 27.

Đồng bằng sông Cửu Long: 33 34 33 29 24 39 42 24 23 19 24 15 26.

(Theo *Tổng cục Thống kê*)

a) Tính số trung bình, trung vị, các tứ phân vị, mốt, khoảng biến thiên, khoảng tứ phân vị, độ lệch chuẩn cho mỗi mẫu số liệu trên.

b) Tại sao số trung bình của hai mẫu số liệu có sự sai khác nhiều trong khi trung vị thì không?

c) Tại sao khoảng biến thiên và độ lệch chuẩn của hai mẫu số liệu khác nhau nhiều trong khi khoảng tứ phân vị thì không?

5.26. Tỉ lệ trẻ em suy dinh dưỡng (tính theo cân nặng ứng với độ tuổi) của 10 tỉnh thuộc Đồng bằng sông Hồng được cho như sau:

5,5 13,8 10,2 12,2 11,0 7,4 11,4 13,1 12,5 13,4.

(Theo *Tổng cục Thống kê*)

a) Tính số trung bình, trung vị, khoảng biến thiên và độ lệch chuẩn của mẫu số liệu trên.

b) Thực hiện làm tròn đến hàng đơn vị cho các giá trị trong mẫu số liệu. Sai số tuyệt đối của phép làm tròn này không vượt quá bao nhiêu?

HOẠT ĐỘNG THỰC HÀNH TRẢI NGHIỆM

TÌM HIỂU MỘT SỐ KIẾN THỨC VỀ TÀI CHÍNH

MỤC TIÊU

- Hiểu sự khác biệt giữa tiết kiệm và đầu tư.
- Thực hành thiết lập kế hoạch đầu tư cá nhân để đạt được tỉ lệ tăng trưởng như mong đợi.

Tiết kiệm và đầu tư là các phương thức khác biệt đóng vai trò quan trọng trong kế hoạch xây dựng tài sản và phân bổ ngân sách chi tiêu của em. Bài học này giúp em thực hành ứng dụng các kiến thức toán học vào thực tiễn, đặc biệt là trong quản lí tài chính.

1. TIẾT KIỆM VÀ ĐẦU TƯ

HĐ1. Tháng 1 năm 2018, mẹ Việt gửi tiết kiệm 2 000 000 000 đồng kì hạn 36 tháng ở ngân hàng với lãi suất 7%/năm. Đến tháng 1 năm 2021, mẹ Việt rút tiền tiết kiệm nêu trên để mua một căn hộ chung cư với giá 30 626 075 đồng/mét vuông.

a) Hỏi tổng số tiền tiết kiệm mẹ Việt rút ra được vào tháng 1 năm 2021 là bao nhiêu?

b) Với số tiền nêu trên, mẹ Việt mua được căn hộ chung cư với diện tích bao nhiêu mét vuông?

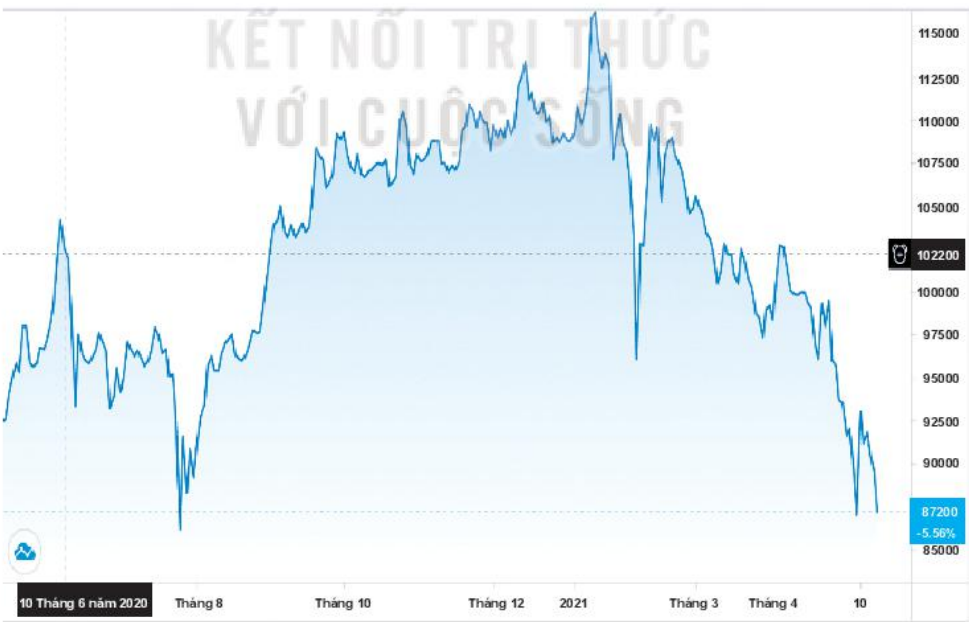
Gửi A đồng vào ngân hàng với lãi suất kép r%/năm, sau n năm, số tiền nhận được tính theo công thức:

$$T = A \cdot (1 + r\%)^n.$$

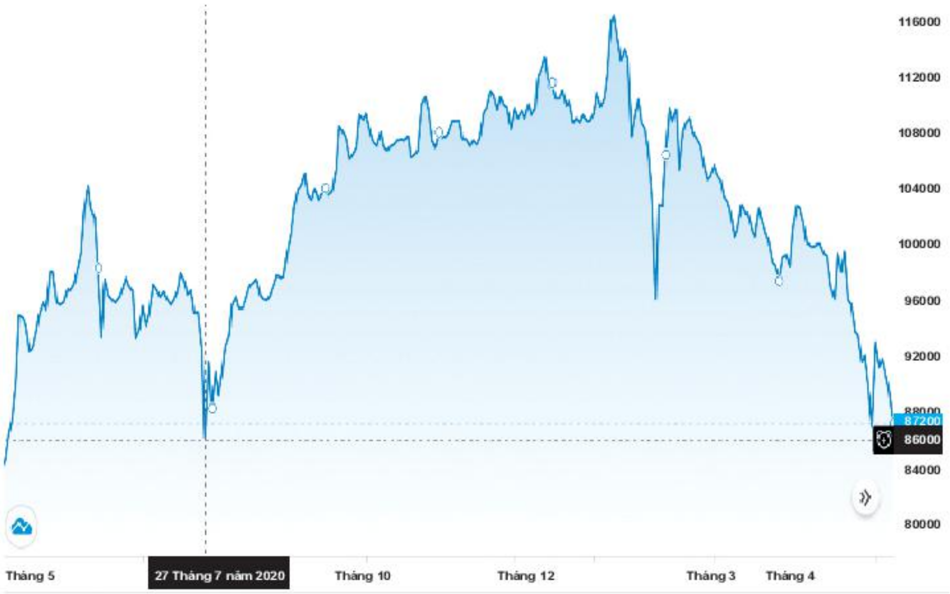
TRAO ĐỔI

Để mua được căn hộ 100 mét vuông ở thời điểm tháng 1 năm 2021, mẹ Việt cần phải gửi tiết kiệm từ tháng 1 năm 2018 bao nhiêu tiền?

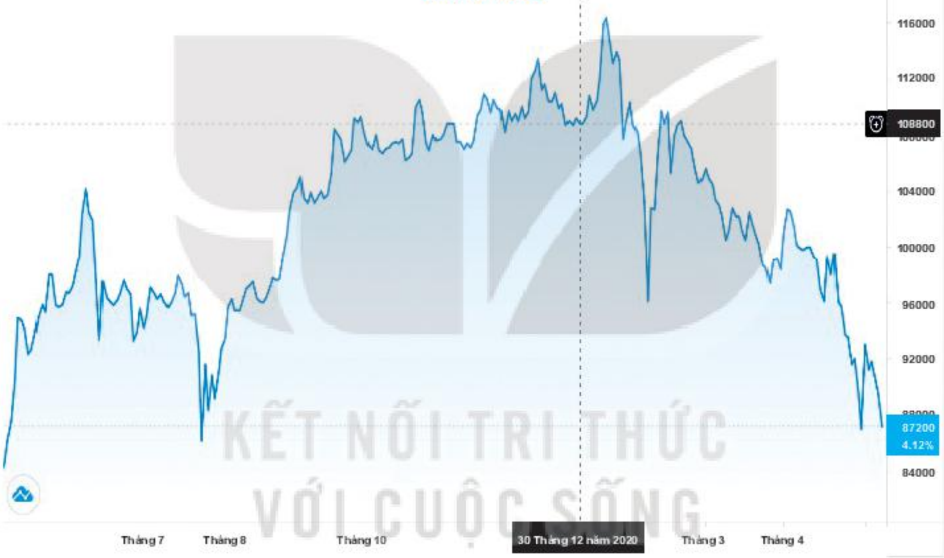
HĐ2. Cô Lan có 511 000 000 đồng và dự định đầu tư vào chứng khoán của công ty A. Biểu đồ chứng khoán của công ty A được cho trong Hình T.1 với những thời điểm khác nhau.



Hình T.1a



Hình T.1b



Hình T.1c

Hình T.1d

Thời gian	10-6-2020	27-7-2020	30-12-2020	10-5-2021
Giá mỗi cổ phiếu (đồng)	102 200	86 000	108 800	91 000
Số cổ phiếu	5 000	5 000	5 000	5 000
Tổng	511 000 000			

a) Nếu cô Lan bán 5 000 cổ phiếu của công ty A vào các thời điểm sau thì tổng số tiền tương ứng cô Lan thu được là bao nhiêu?

27-7-2020; 30-12-2020; 10-5-2021.

b) Nếu ngày 10-6-2020 cô Lan dùng số tiền 511 000 000 đồng để gửi tiết kiệm với lãi suất 6%/năm cho kì hạn một tháng thì ngày 10-5-2021, tổng số tiền cô Lan nhận được là bao nhiêu?

TRAO ĐỔI

a) Với tình huống trên, cô Lan nên đầu tư như thế nào để hiệu quả nhất?

b) Nếu so sánh giữa việc gửi tiết kiệm và đầu tư, cô Lan nên chọn hình thức nào?

Em có biết?

Tiết kiệm và **đầu tư** là nền tảng cho các hoạt động về tài chính.

Về cơ bản, có thể hiểu tiết kiệm là việc lưu giữ giá trị, biến sức mua hiện tại thành sức mua trong tương lai; còn đầu tư là nhằm gia tăng giá trị. Đầu tư liên quan đến việc đưa tài chính vào các khoản đầu tư, chẳng hạn như cổ phiếu, với hi vọng tài chính sẽ tăng lên.

Vận dụng 1. Anh Tiến có 898 200 000 đồng dự định đầu tư. Anh Tiến mong muốn sau 2 năm sẽ nhận được số tiền (cả gốc lẫn lãi) là 1 tỉ đồng. Ngày 9-12-2020, anh Tiến quyết định đầu tư mua cổ phiếu của công ty B. Giá mỗi cổ phiếu là 24 950 đồng. Biểu đồ chứng khoán của công ty B được cho trong Hình T.2.

Hình T.2

Dựa vào biểu đồ trên, hãy tính số tiền mà anh Tiến thu được khi bán cổ phiếu của công ty B tại các thời điểm sau:

a) 15-3-2021; b) 15-4-2021; c) 18-5-2021.

2. THUẾ THU NHẬP CÁ NHÂN

HĐ3. Thuế suất biểu luỹ tiến từng phần được phân loại chi tiết trong bảng sau:

Bậc thuế	Phần thu nhập tính thuế/tháng (triệu đồng)	Thuế suất (%)
1	Đến 05	5
2	Trên 05 đến 10	10
3	Trên 10 đến 18	15
4	Trên 18 đến 32	20
5	Trên 32 đến 52	25
6	Trên 52 đến 80	30
7	Trên 80	35

- Thuế thu nhập cá nhân là khoản tiền (thuế) mà người có thu nhập phải trích nộp một phần vào ngân sách nhà nước sau khi đã tính các khoản được giảm trừ. Các khoản giảm trừ thông thường bao gồm:
  - Giảm trừ bản thân;
  - Giảm trừ người phụ thuộc.
- Thuế suất thuế thu nhập cá nhân là tỉ lệ phần trăm dùng để tính số thuế phải nộp căn cứ vào phần thu nhập tính thuế của mỗi người.

a) Hãy lập công thức hàm số bậc nhất mô tả sự phụ thuộc của thuế thu nhập cá nhân vào phần thu nhập tính thuế/tháng với mức thu nhập tính thuế/tháng không quá 5 triệu đồng và vẽ đồ thị hàm số này.

b) Hãy lập công thức hàm số bậc nhất mô tả sự phụ thuộc của thuế thu nhập cá nhân vào phần thu nhập tính thuế/tháng với mức thu nhập tính thuế/tháng trên 5 triệu đồng và không quá 10 triệu đồng. Vẽ đồ thị hàm số này.

- Thu nhập tính thuế = Thu nhập chịu thuế – Các khoản giảm trừ.
- Thuế thu nhập cá nhân = Thu nhập tính thuế × Thuế suất.

c) Anh Nam làm việc ở một ngân hàng với mức thu nhập chịu thuế đều đặn là 28 triệu đồng/tháng và có một người phụ thuộc (một con nhỏ dưới 18 tuổi). Hãy giúp anh Nam tính số thuế thu nhập cá nhân mà anh phải nộp trong một năm, biết rằng các khoản giảm trừ được tính bao gồm giảm trừ bản thân cho anh Nam (11 triệu đồng/tháng) và giảm trừ người phụ thuộc (4,4 triệu đồng/tháng cho mỗi người phụ thuộc).

Vận dụng 2. Hãy sử dụng bảng thuế suất biểu luỹ tiến từng phần được cho trong HĐ3 để xây dựng công thức tính thuế thu nhập cá nhân theo từng trường hợp (căn cứ vào phần thu nhập tính thuế).

MẠNG XÃ HỘI: LỢI VÀ HẠI

Ngày nay cùng với Internet, mạng xã hội đã trở nên quen thuộc với nhiều người. Một nhóm các bạn học sinh lớp 10A muốn tìm hiểu thực tế sử dụng mạng xã hội của các bạn trong lớp mình. Những vấn đề các bạn quan tâm là:

1. Lợi ích, bất lợi lớn nhất khi dùng mạng xã hội là gì?
2. Thời gian sử dụng mạng xã hội của các bạn trong lớp như thế nào?
3. Các bạn nam và bạn nữ có thời gian sử dụng mạng xã hội khác nhau không?

1. THU THẬP DỮ LIỆU

Các bạn trong nhóm đã lập một phiếu khảo sát để thu thập dữ liệu như sau:

KHẢO SÁT VỀ SỬ DỤNG MẠNG XÃ HỘI

1. Giới tính của bạn:

☐ Nữ ☐ Nam

2. Lợi ích lớn nhất mà mạng xã hội mang lại là (chọn một phương án):

☐ Kết nối với bạn bè ☐ Giải trí

☐ Thu thập thông tin ☐ Tìm hiểu thế giới xung quanh

3. Điều bất lợi lớn nhất khi sử dụng mạng xã hội là (chọn một phương án):

☐ Có nguy cơ tiếp xúc với những bài viết, hình ảnh, video, ý kiến tiêu cực, không thích hợp

☐ Thông tin cá nhân bị đánh cắp

☐ Có thể bị bắt nạt trên Internet

☐ Mất thời gian sử dụng Internet

4. Thời gian (ước lượng số phút) bạn sử dụng mạng xã hội trong một ngày:

....

HĐ1. Hãy dùng phiếu khảo sát theo mẫu trên, tiến hành thu thập dữ liệu với ít nhất 30 phiếu và ghi lại dữ liệu theo mẫu sau:

STT	Giới tính	Thời gian dùng mạng xã hội	Lợi ích	Bất lợi
1	Nam	60	3	2

Hình T.3

2. XỬ LÍ VÀ PHÂN TÍCH SỐ LIỆU

HĐ2. Lợi ích và bất lợi của mạng xã hội

Để biết các bạn học sinh tham gia khảo sát đánh giá thế nào về lợi ích và bất lợi của mạng xã hội, hãy thực hiện các yêu cầu sau:

a) Lập bảng tần số của dữ liệu ý kiến về lợi ích/bất lợi của mạng xã hội theo mẫu sau:

Ý kiến	Kết nối với bạn bè	Giải trí	Thu thập thông tin	Tìm hiểu thế giới xung quanh
Số học sinh				

Bảng T.1

b) Rút ra nhận xét từ bảng tần số thu được.

HĐ3. Thời gian sử dụng mạng xã hội

Hãy tính một số số đo thống kê mô tả được liệt kê trong Bảng T.2 của mẫu số liệu về thời gian sử dụng mạng xã hội:

Giá trị nhỏ nhất	Q_1	Số trung bình	Trung vị	Q_3	Mốt	Giá trị lớn nhất

Bảng T.2

Dựa trên những số đặc trưng tính được, hãy nêu nhận xét về thời gian sử dụng mạng xã hội của các học sinh được khảo sát.

HĐ4. Thời gian sử dụng mạng xã hội của học sinh nam và học sinh nữ

a) Hãy tính số trung bình, trung vị, tứ phân vị của thời gian sử dụng mạng xã hội trên hai nhóm học sinh nữ và học sinh nam để so sánh thời gian sử dụng mạng xã hội của hai nhóm.

	Số trung bình	Q_1	Trung vị (Q_2)	Q_3
Nữ				
Nam				

Bảng T.3

b) Hãy tính một vài số đo độ phân tán để so sánh sự biến động của thời gian sử dụng mạng xã hội trên hai nhóm học sinh.

	Khoảng biến thiên	Khoảng tứ phân vị	Độ lệch chuẩn
Nữ			
Nam			

Bảng T.4

3. GÓC CÔNG NGHỆ THÔNG TIN

Ta có thể dùng máy tính cầm tay hoặc phần mềm bảng tính để tính các số đặc trưng của mẫu số liệu.

Sử dụng máy tính cầm tay

Giả sử khảo sát được thời gian sử dụng mạng xã hội của một số bạn như sau:

60 90 120 60 15 50 80 30 120 90.

Sử dụng máy tính cầm tay để tính những số đặc trưng của mẫu số liệu trên:

❶ Vào chế độ thống kê:

[MODE] [3] [1]

❷ Nhập số liệu vào máy:

[6] [0] [=] [9] [0] [=] [1] [2] [0] [=] [6] [0] [=] [1] [5] [=] [5] [0] [=]

[8] [0] [=] [3] [0] [=] [1] [2] [0] [=] [9] [0] [=]

❸ Tính số trung bình:

[AC] [SHIFT] [1] [4] [2] [=]

Ta được kết quả số trung bình là 71,5.

❹ Tính độ lệch chuẩn:

[AC] [SHIFT] [1] [4] [3] [=]

Ta được kết quả độ lệch chuẩn là s = 33,32041416.

Chú ý. Để tính đại lượng:

$$\hat{s} = \sqrt{\frac{(x_1 - \overline{x})^2 + (x_2 - \overline{x})^2 + \ldots + (x_n - \overline{x})^2}{n-1}}$$

ta ấn [AC] [SHIFT] [1] [4] [4] [=]

Kết quả là $\hat{s} = 35,12280045$.

Sử dụng phần mềm bảng tính

Với những mẫu số liệu lớn hơn, phần mềm thống kê sẽ giúp cho việc xử lí dữ liệu trở nên nhanh chóng và chính xác. Những hướng dẫn sau được minh hoạ trên số liệu về điểm thi khảo sát môn Tiếng Anh (thang điểm 100) của 45 học sinh:

32	75	59	66	69	44	29	66	58	72	65	62	88	71	60
64	68	69	57	60	72	54	65	62	90	61	59	68	56	42
69	67	67	55	66	72	55	61	71	70	65	61	60	60	79

a) Dùng các hàm tính số đặc trưng

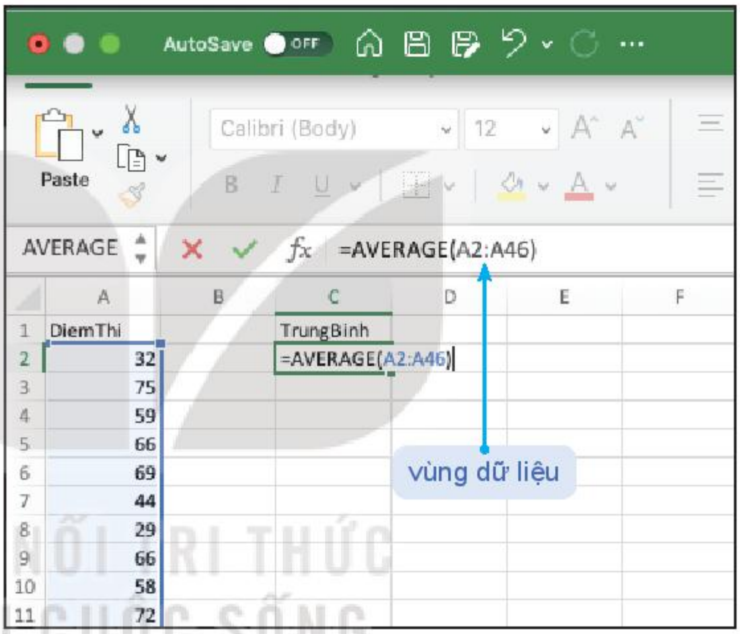
Việc tính các số đặc trưng của một mẫu số liệu có thể thực hiện trên phần mềm bảng tính nhờ những hàm có sẵn. Chẳng hạn, để tính số trung bình ta làm như sau:

❶ Nhập số liệu vào một cột của bảng tính.

❷ Tại một ô trống để chứa kết quả gõ:

= AVERAGE(vùng dữ liệu)

Trong ví dụ trên kết quả trả về giá trị trung bình của mẫu số liệu là 63,13 (H.T.4).



Hình T.4

Để tính những số đặc trưng khác em hãy thay hàm AVERAGE bởi hàm thích hợp theo bảng sau:

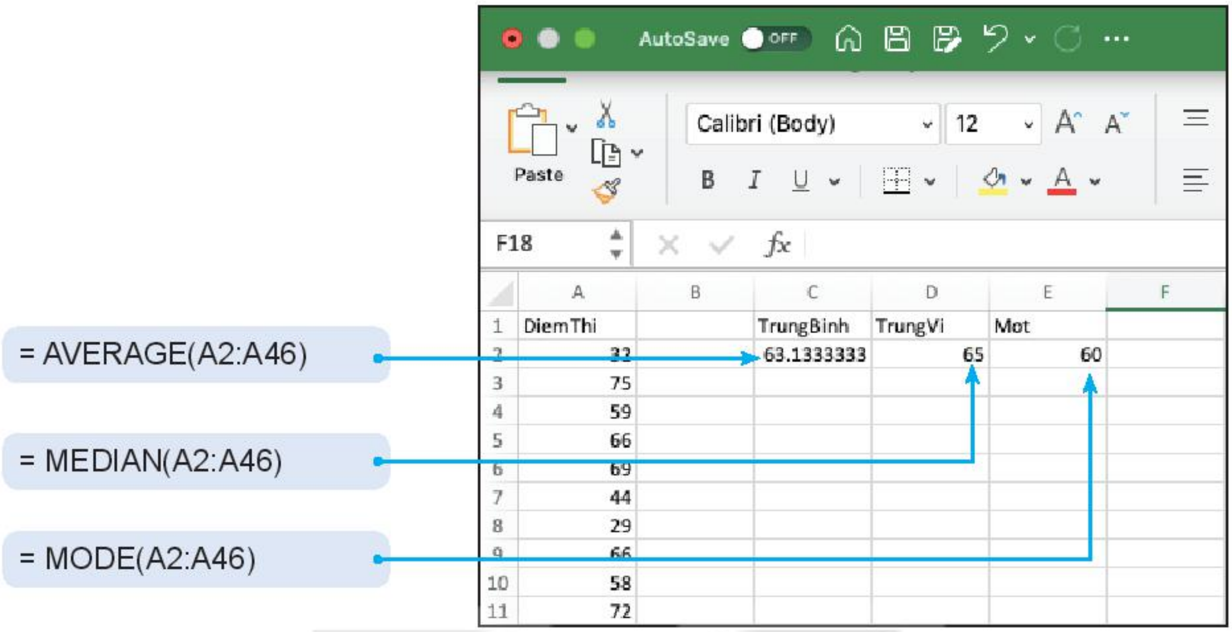
Số đặc trưng	Hàm
Số trung bình	AVERAGE
Trung vị	MEDIAN
Mốt	MODE
Tứ phân vị	QUARTILE

Bảng T.5. Danh sách hàm để tính số đo xu thế trung tâm

Số đặc trưng	Hàm
Giá trị nhỏ nhất	MIN
Giá trị lớn nhất	MAX
Phương sai	VAR, VARP
Độ lệch chuẩn	STDEV, STDEVP

Bảng T.6. Danh sách hàm để tính số đo độ phân tán

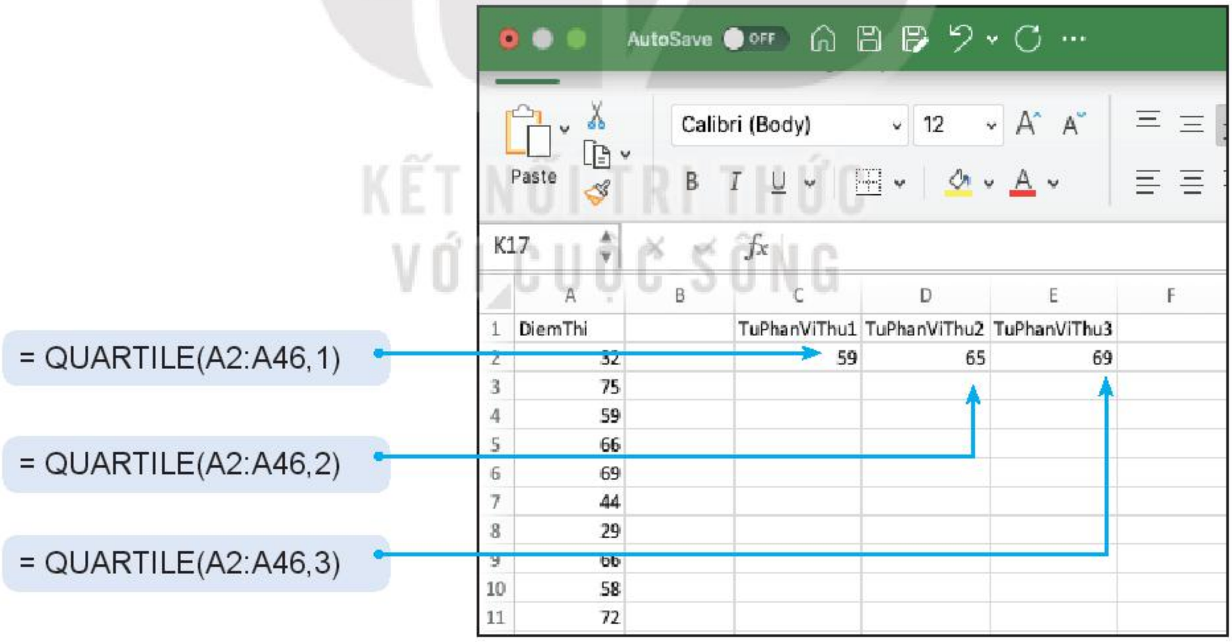
- Tính số trung bình, trung vị, mốt (H.T.5).



Hình T.5

Chú ý. Hàm MODE sẽ trả về giá trị #N/A nếu mẫu số liệu không có giá trị lặp lại. Trong trường hợp mẫu số liệu có nhiều mốt thì phần mềm bảng tính hiển thị giá trị mốt nhỏ nhất.

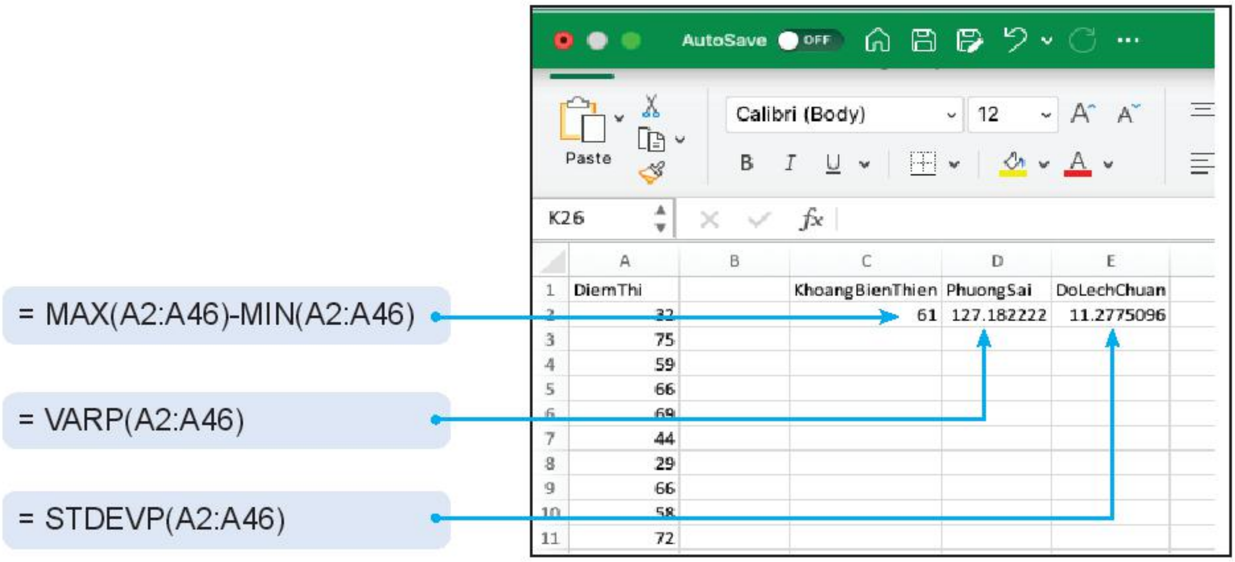
- Tính tứ phân vị (H.T.6).



Hình T.6

Chú ý. Kết quả tính tứ phân vị bằng phần mềm bảng tính có sự sai khác nhỏ so với cách tính được giới thiệu ở Bài 13 (do dùng công thức khác nhau).

- Tính phương sai, độ lệch chuẩn, khoảng biến thiên (H.T.7).



Hình T.7

Chú ý. Để tính $\hat{s}^2$ và $\hat{s}$ ta thay VARP bởi VAR và thay STDEVP bởi STDEV.

b) Dùng chức năng phân tích dữ liệu trên thanh công cụ

Ngoài các hàm tính các số đặc trưng riêng lẻ, phần mềm bảng tính cho phép in ra một bảng tổng hợp gồm nhiều số đặc trưng khác nhau. Cách thực hiện như sau:

❶ Nhập số liệu vào một cột.

❷ Trên menu chọn Tools → Data Analysis → Descriptive Statistics.

❸ Tại Input Range chọn vùng dữ liệu (A1: A46). Nháy chọn Label in first row. Tại Output Range chọn một ô trống để xác định vị trí hiển thị kết quả tích và nháy chọn Summary statistics.

Chú ý

– Trong hình bên, phương sai và độ lệch chuẩn tính theo công thức tính $\hat{s}^2$ và $\hat{s}$ tương ứng. Có một vài số đặc trưng chưa được giới thiệu trong phạm vi Toán 10.

– Để tính những số đặc trưng cho hai mẫu số liệu ta nhập số liệu vào hai cột và tiến hành tương tự.

Diem thi	
Mean	63.1333333
Standard Error	1.70014854
Median	65
Mode	60
Standard Deviation	11.4049431
Sample Variance	130.072727
Kurtosis	2.43808457
Knewness	–0.7116263
Range	61
Mininmum	29
Maximum	90
Sum	2841
Count	45

Hình T.8

BẢNG TRA CỨU THUẬT NGỮ

BẢNG GIẢI THÍCH THUẬT NGỮ

Thuật ngữ	Giải thích
Biểu diễn miền nghiệm của bất phương trình bậc nhất hai ẩn	Biểu diễn trên mặt phẳng toạ độ *Oxy* miền nghiệm của bất phương trình bậc nhất hai ẩn
Biểu diễn miền nghiệm của hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn	Biểu diễn trên mặt phẳng toạ độ *Oxy* giao các miền nghiệm của các bất phương trình bậc nhất hai ẩn trong hệ
Biểu đồ Ven	Hình phẳng giới hạn bởi một đường cong khép kín dùng để minh hoạ tập hợp
Định lí toán học	Mệnh đề đúng và thường có dạng $P \Rightarrow Q$. Khi đó P gọi là giả thiết, Q gọi là kết luận của định lí
Độ chính xác	Cận trên nhỏ nhất của sai số tuyệt đối
Độ lệch chuẩn	Căn bậc hai của phương sai
Hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn	Hệ gồm một số bất phương trình bậc nhất hai ẩn x, y
Hệ thức lượng trong tam giác	Hệ thức về mối liên hệ giữa các yếu tố trong một tam giác
Khoảng biến thiên	Hiệu giữa giá trị lớn nhất và giá trị bé nhất trong mẫu số liệu
Khoảng tứ phân vị	Hiệu giữa tứ phân vị thứ ba và tứ phân vị thứ nhất
Mệnh đề	Một phát biểu khẳng định một sự kiện nào đó, mà khẳng định đó chỉ nhận một trong hai giá trị “đúng” hoặc “sai”
Miền nghiệm của bất phương trình bậc nhất hai ẩn	Tập hợp các điểm trong mặt phẳng toạ độ *Oxy* có toạ độ là nghiệm của bất phương trình bậc nhất hai ẩn
Miền nghiệm của hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn	Giao các miền nghiệm của các bất phương trình bậc nhất hai ẩn trong hệ
Mốt	Số xuất hiện nhiều nhất trong mẫu số liệu
Phép chứng minh định lí $P \Rightarrow Q$	Phép chứng minh mệnh đề $P \Rightarrow Q$ là đúng, bao gồm các bước sau: Giả thiết mệnh đề P là đúng; dùng suy luận và các kiến thức toán học đã biết, chứng minh mệnh đề Q là đúng; kết luận mệnh đề $P \Rightarrow Q$ là đúng
Phương sai	Số đo độ phân tán của mẫu số liệu được tính dựa trên thông tin của tất cả các giá trị trong mẫu số liệu
Số gần đúng	Số dùng để xấp xỉ cho số đúng
Sai số tuyệt đối	Khoảng cách giữa số gần đúng và số đúng
Sai số tương đối	Tỉ số giữa sai số tuyệt đối và giá trị tuyệt đối của số gần đúng
Số quy tròn	Số thu được sau khi thực hiện làm tròn số
Số trung bình	Trung bình cộng của mẫu số liệu
Trung vị	Số chia đôi mẫu số liệu được sắp xếp theo thứ tự từ nhỏ đến lớn
Tứ phân vị	Các số chia mẫu số liệu được sắp theo thứ tự từ nhỏ đến lớn thành 4 phần, mỗi phần chứa 25% giá trị

Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam xin trân trọng cảm ơn các tác giả có tác phẩm, tư liệu được sử dụng, trích dẫn trong cuốn sách này.

Chịu trách nhiệm xuất bản:
Chủ tịch Hội đồng Thành viên NGUYỄN ĐỨC THÁI
Tổng Giám đốc HOÀNG LÊ BÁCH

Chịu trách nhiệm nội dung:
Tổng Giám đốc HOÀNG LÊ BÁCH

Biên tập nội dung: LƯU THẾ SƠN – HOÀNG VIỆT
Biên tập mĩ thuật: NGUYỄN BÍCH LA
Thiết kế sách: PHAN THỊ THU HƯƠNG
Trình bày bìa: NGUYỄN BÍCH LA
Minh hoạ: BÙI VIỆT DUY
Sửa bản in: PHAN THỊ THANH BÌNH
Chế bản: CTCP MĨ THUẬT VÀ TRUYỀN THÔNG

TOÁN 10 – TẬP MỘT

Mã số: ...
In ... bản, (QĐ ...) khổ 19 x 26,5 cm.
Đơn vị in: ...
Cơ sở in: ...
Số ĐKXB: .../CXBIPH/.../GD.
Số QĐXB: .../QĐ - GD - HN ngày ... tháng ...năm ...
In xong và nộp lưu chiểu tháng ... năm 20...
Mã số ISBN: ...

HUÂN CHƯƠNG HỒ CHÍ MINH

BỘ SÁCH GIÁO KHOA LỚP 10 – KẾT NỐI TRI THỨC VỚI CUỘC SỐNG

1. Toán 10, tập một
2. Toán 10, tập hai
3. Chuyên đề học tập Toán 10
4. Ngữ văn 10, tập một
5. Ngữ văn 10, tập hai
6. Chuyên đề học tập Ngữ văn 10
7. Lịch sử 10
8. Chuyên đề học tập Lịch sử 10
9. Địa lí 10
10. Chuyên đề học tập Địa lí 10
11. Giáo dục Kinh tế và Pháp luật 10
12. Chuyên đề học tập Giáo dục Kinh tế và Pháp luật 10
13. Vật lí 10
14. Chuyên đề học tập Vật lí 10
15. Hoá học 10
16. Chuyên đề học tập Hoá học 10
17. Sinh học 10
18. Chuyên đề học tập Sinh học 10
19. Công nghệ 10 – Thiết kế và Công nghệ
20. Chuyên đề học tập Công nghệ 10 – Thiết kế và Công nghệ
21. Công nghệ 10 – Công nghệ trồng trọt
22. Chuyên đề học tập Công nghệ 10 – Công nghệ trồng trọt
23. Tin học 10
24. Chuyên đề học tập Tin học 10 – Định hướng Tin học ứng dụng
25. Chuyên đề học tập Tin học 10 – Định hướng Khoa học máy tính
26. Mĩ thuật 10 – Thiết kế mĩ thuật đa phương tiện
27. Mĩ thuật 10 – Thiết kế đồ hoạ
28. Mĩ thuật 10 – Thiết kế thời trang
29. Mĩ thuật 10 – Thiết kế mĩ thuật sân khấu, điện ảnh
30. Mĩ thuật 10 – Lí luận và lịch sử mĩ thuật
31. Mĩ thuật 10 – Điêu khắc
32. Mĩ thuật 10 – Kiến trúc
33. Mĩ thuật 10 – Hội hoạ
34. Mĩ thuật 10 – Đồ hoạ (tranh in)
35. Mĩ thuật 10 – Thiết kế công nghiệp
36. Chuyên đề học tập Mĩ thuật 10
37. Âm nhạc 10
38. Chuyên đề học tập Âm nhạc 10
39. Hoạt động trải nghiệm, hướng nghiệp 10
40. Giáo dục thể chất 10 – Cầu lông
41. Giáo dục thể chất 10 – Bóng đá
42. Giáo dục Quốc phòng và An ninh 10
43. Tiếng Anh 10, tập một
44. Tiếng Anh 10, tập hai

Các đơn vị đầu mối phát hành

- **Miền Bắc:** CTCP Đầu tư và Phát triển Giáo dục Hà Nội
  CTCP Sách và Thiết bị Giáo dục miền Bắc
- **Miền Trung:** CTCP Đầu tư và Phát triển Giáo dục Đà Nẵng
  CTCP Sách và Thiết bị Giáo dục miền Trung
- **Miền Nam:** CTCP Đầu tư và Phát triển Giáo dục Phương Nam
  CTCP Sách và Thiết bị Giáo dục miền Nam
- **Cửu Long:** CTCP Sách và Thiết bị Giáo dục Cửu Long

Sách điện tử: http://hanhtrangso.nxbgd.vn

Kích hoạt để mở học liệu điện tử: Cào lớp nhũ trên tem để nhận mã số. Truy cập http://hanhtrangso.nxbgd.vn và nhập mã số tại biểu tượng chìa khoá.

Giá: .... đ